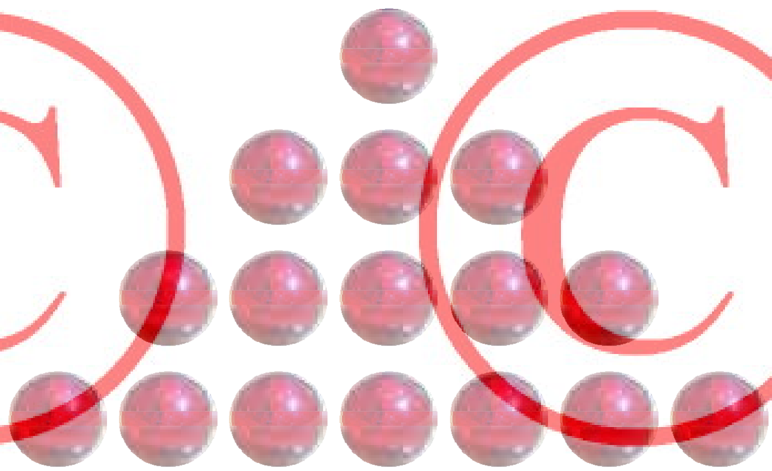
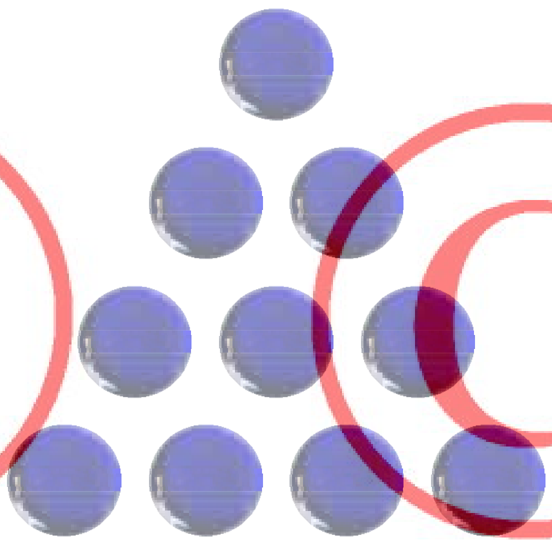
Dreieck-Zahlen





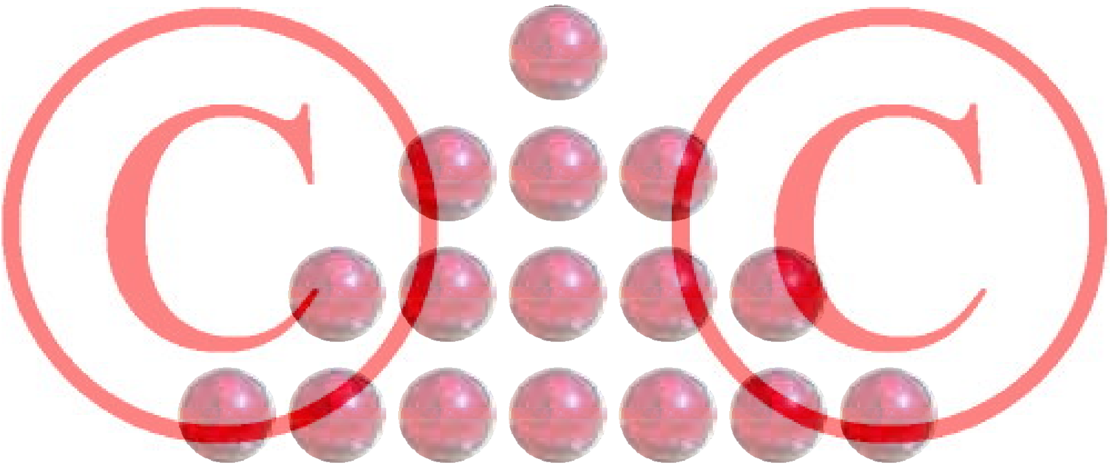
von

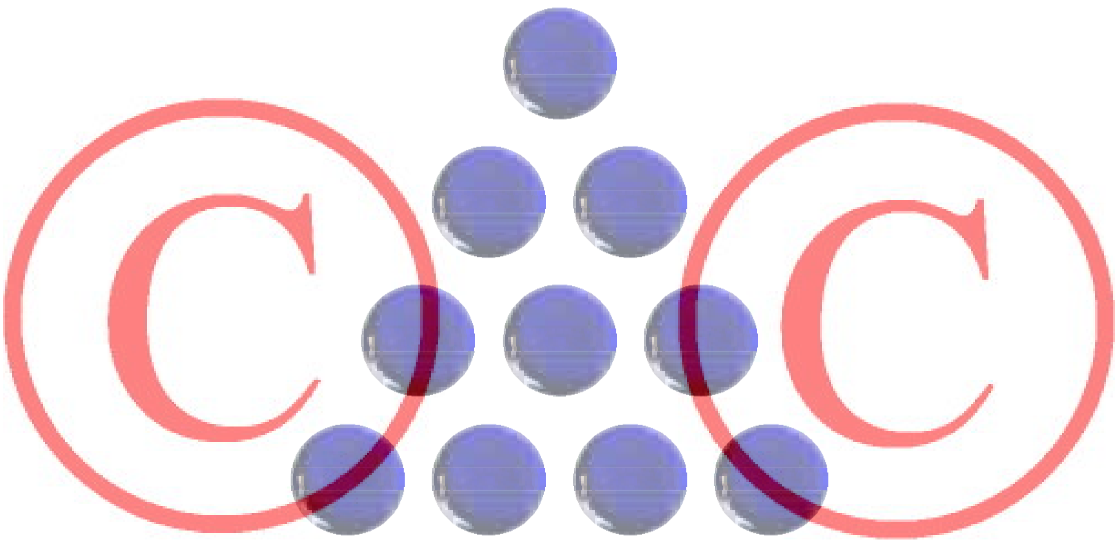
Markus Wurster

DREIECK-ZAHLEN

Titelseite und Buchrücken für Ringbuch

Dreieck-Zahlen





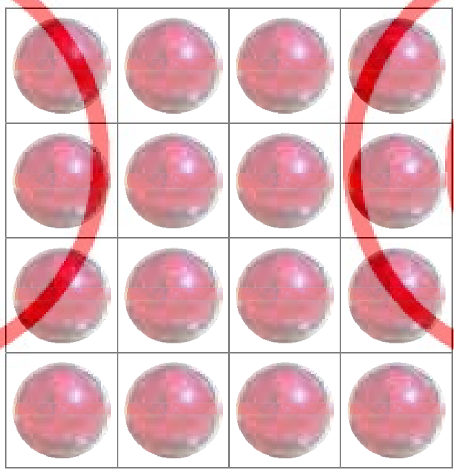
von

Markus Wurster

1. Quadratzahlen

Was Quadratzahlen sind, weißt du bestimmt:

Man kann Perlen auf dem Wurzelbrett so anordnen, dass ein Quadrat entsteht.



Auf diesem Bild sind es 4 Reihen und in jeder Reihe ebenfalls 4 Perlen.

$$4 \cdot 4 = 16$$

16 ist eine Quadratzahl.

Andere Zahlen, die man im Quadrat legen kann, sind:

1 = 1 • 1	**25** = 5 • 5	**81** = 9 • 9
4 = 2 • 2	**36** = 6 • 6	**100** = 10 • 10
9 = 3 • 3	**49** = 7 • 7	
16 = 4 • 4	**64** = 8 • 8	

100 kann man als Quadrat (10 • 10) legen, das ist ganz einfach...

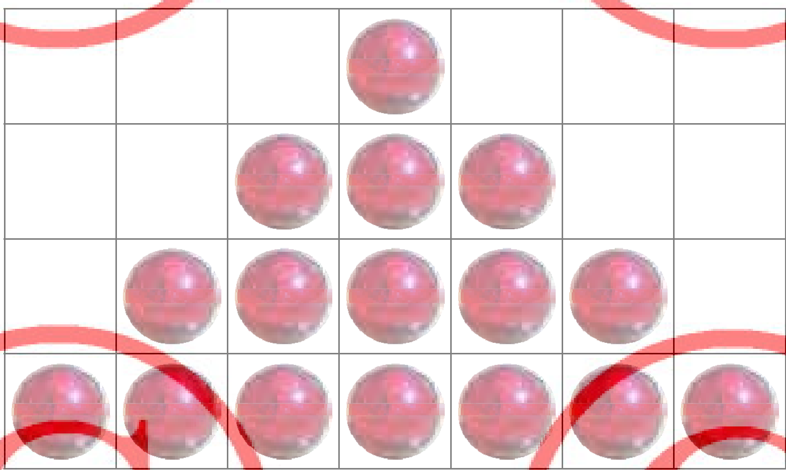
2. Eine Zahl im Dreieck?

... aber kann man 100 auch im Dreieck legen?

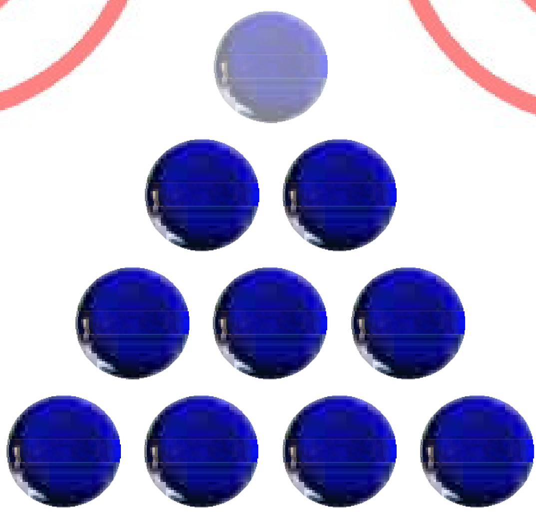
Eine merkwürdige Frage, aber sie ist interessant. Wollen wir es herausfinden?

Stelle dir zuerst vor, wie du die Perlen als Dreieck legen möchtest.

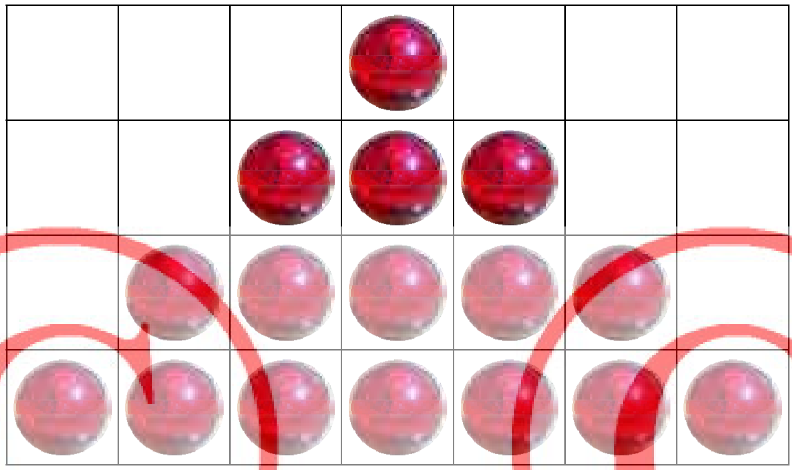
1. Möglichkeit: Die Perlen liegen in Spalten – senkrecht übereinander.



2. Möglichkeit: Die Perlen liegen auf Lücke versetzt.



1. Möglichkeit: Die Perlen liegen in Spalten – senkrecht übereinander.

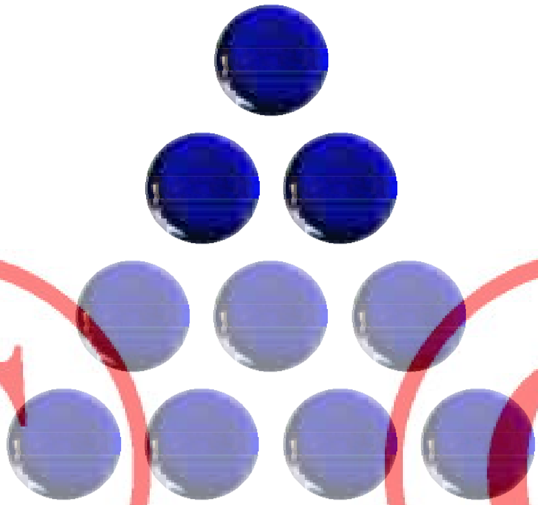


→ ***Lege Perlen auf dem Wurzelbrett aus.***

Schaffst du ein Dreieck mit genau 100 Perlen?

Wie viele Reihen brauchst du?

2. Möglichkeit: Die Perlen liegen auf Lücke versetzt.



→ ***Bei dieser Anordnung kann man das Wurzelbrett nicht verwenden. Nimm stattdessen Plättchen oder Muggelsteine und lege sie auf ein Arbeitsbrett.***

Schaffst du ein Dreieck mit genau 100 Perlen?

Wie viele Reihen brauchst du?

3. Dreieck-Zahlen

Welche Zahlen kann man als Dreieck legen?

→ ***Mache dir eine Tabelle:***

1. Möglichkeit: Die Perlen liegen in Spalten – senkrecht übereinander.

Um wie viel wächst die jeweils nächste Reihe?

Antwort: Jede neue Reihe hat _________ mehr als die vorhergehende.

Reihe	Perlen in der Reihe	Summe ganzes Dreieck **„Dreieck-Zahlen"**
1	1	**1**
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
...		

2. Möglichkeit: Die Perlen liegen auf Lücke versetzt.

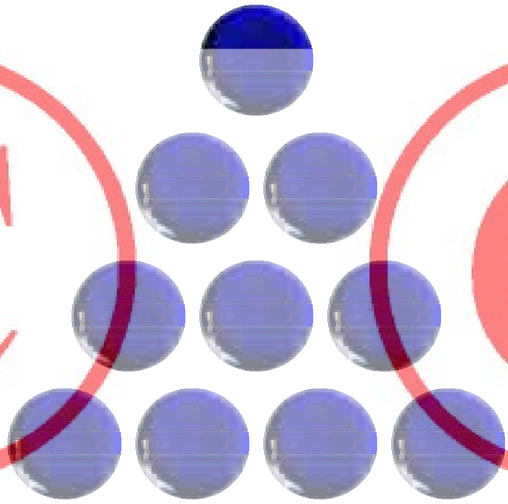
Um wie viel wächst die jeweils nächste Reihe?

Antwort: Jede neue Reihe hat ________ mehr als die vorhergehende.

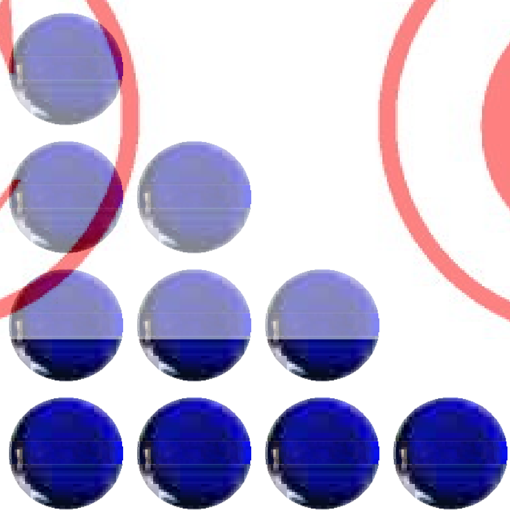
Reihe	Perlen in der Reihe	Summe ganzes Dreieck **„Dreieck-Zahlen"**
1	1	1
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
...		

→ ***Beschreibe, was du herausgefunden hast.***

4. Dreieck und Treppe – Umformen und Ergänzen: Mathematische Behauptungen zum Überprüfen

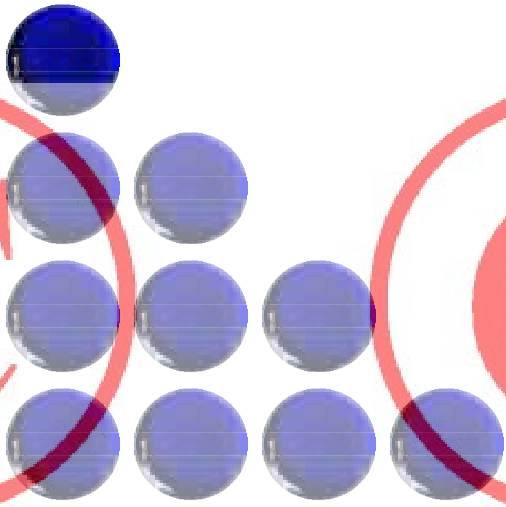


Für die folgenden Überlegungen ist es hilfreich, wenn man die Steine des Dreiecks leicht verschiebt:



1. Behauptung

Aus Dreieckszahlen lassen sich immer gleichseitige Dreiecke bilden.



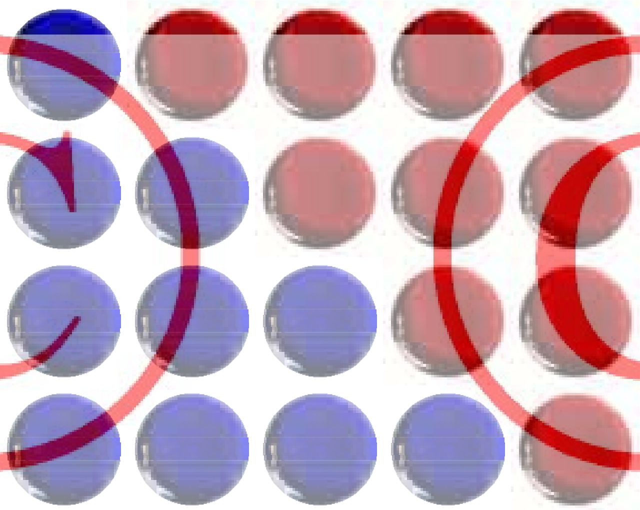
Beispiel: Jede Seite hat 4 Steine.

→ *Überprüfe diese Aussage mit mehreren Dreieckszahlen (Treppen).*
Zeichne deine Ergebnisse auf.

Du kannst dazu auch gut das Wurzelbrett verwenden, indem du die Dreiecke in eine Brettecke legst und dann erweiterst.

2. Behauptung

Zwei gleiche Dreiecke (Treppen) zusammengelegt, ergeben immer ein Rechteck.



→ *Überprüfe diese Aussage mit mehreren Dreieckszahlen (Treppen). Zeichne deine Ergebnisse auf.*

Dieses Gesetz fanden die Mathematiker übrigens schon im 2. Jahrhundert heraus.
Man kann sich dieses Gesetz zunutze machen, wenn man ganz einfach errechnen will, aus wie vielen Steinen ein Dreieck besteht.

Dazu errechnet man einfach die Anzahl der Steine im Rechteck.

Wenn das Dreieck 4 Steine hoch ist, dann ist das Rechteck 4 Steine plus 1 Stein (also 5 Steine) lang. Das ganze Rechteck hat demnach 20 Steine.

Weil das Rechteck aus 2 gleichen Dreiecken besteht, hat ein Dreieck nur die Hälfte der Steine, nämlich 10.

Mathematiker beschreiben solch eine Rechnung mit einer allgemeinen Formel:

Die Größe (Seitenlinie) des Dreicks ist n.
Die lange Seite des Rechtecks ist $n+1$.

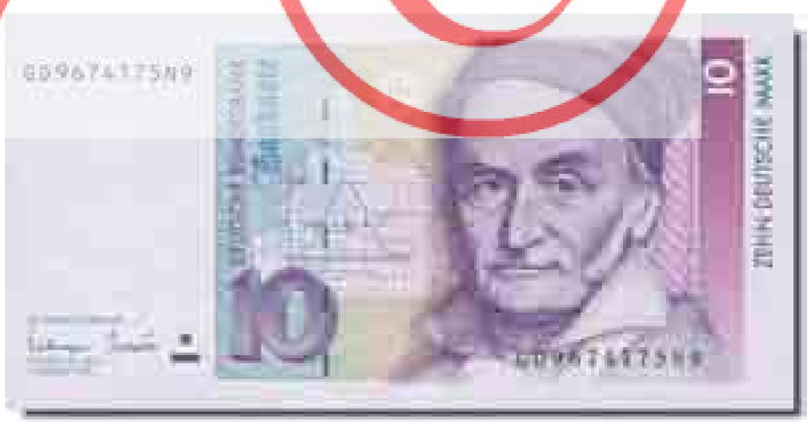
Die Zahl der Steine im Rechteck ist Höhe mal Länge:

$$n \cdot (n+1)$$

Die Zahl der Steine eines Dreiecks ist:

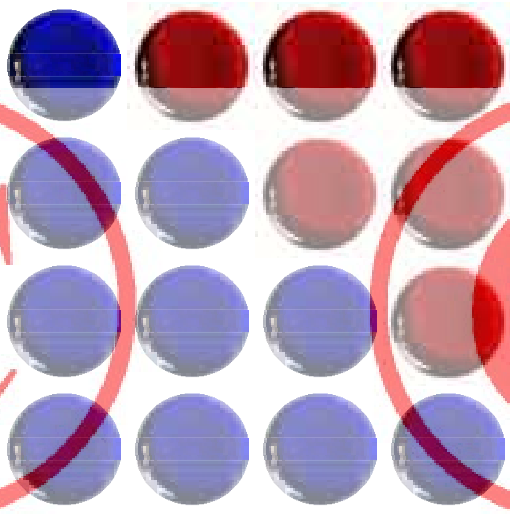
$$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Der geniale Mathematiker Carl Friedrich Gauß hatte mit diesem Rechentrick vor 230 Jahren als 7-jähriger Schüler seinen Lehrer total verblüfft. Lasse dir die Geschichte erzählen, wenn du Lust darauf hast.



3. Behauptung

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen ist eine Quadratzahl.

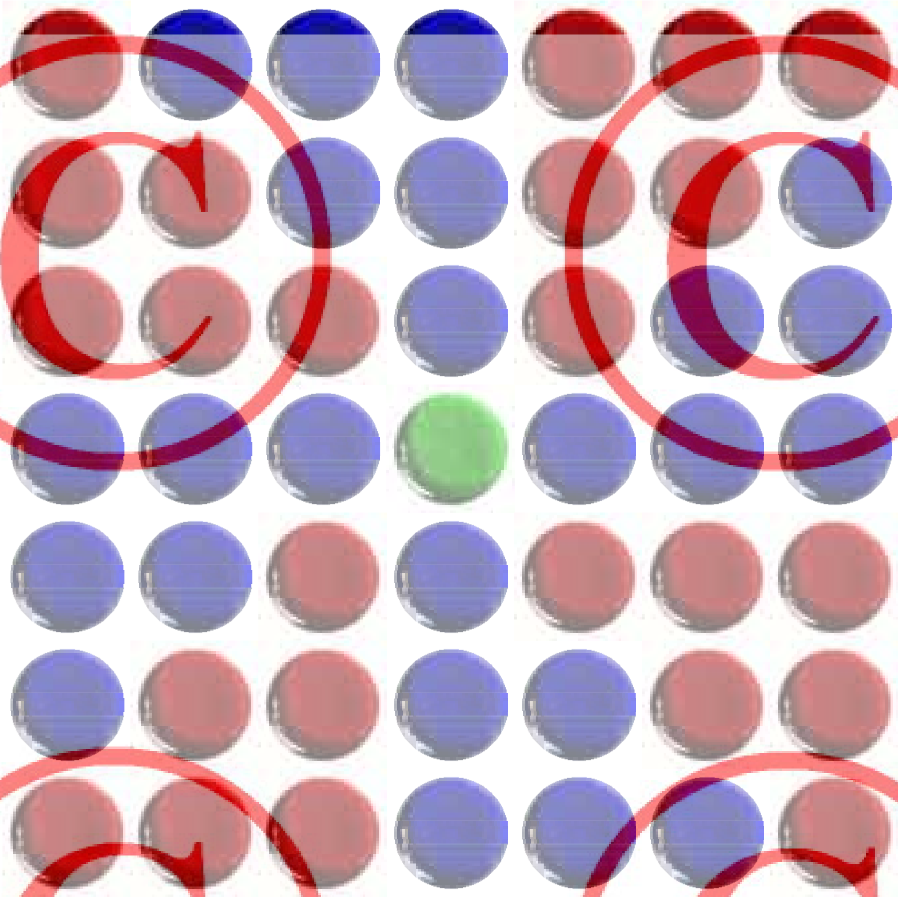


Beispiel:
Dreieckszahl von 4 (= 10) plus Dreieckszahl von 3 (= 6) gleich 16

→ *Überprüfe diese Aussage mit mehreren Dreieckszahlen (Treppen).*
Zeichne deine Ergebnisse auf.

4. Behauptung

Das Achtfache einer Dreieckszahl addiert mit 1 ergibt immer eine ungerade Quadratzahl.



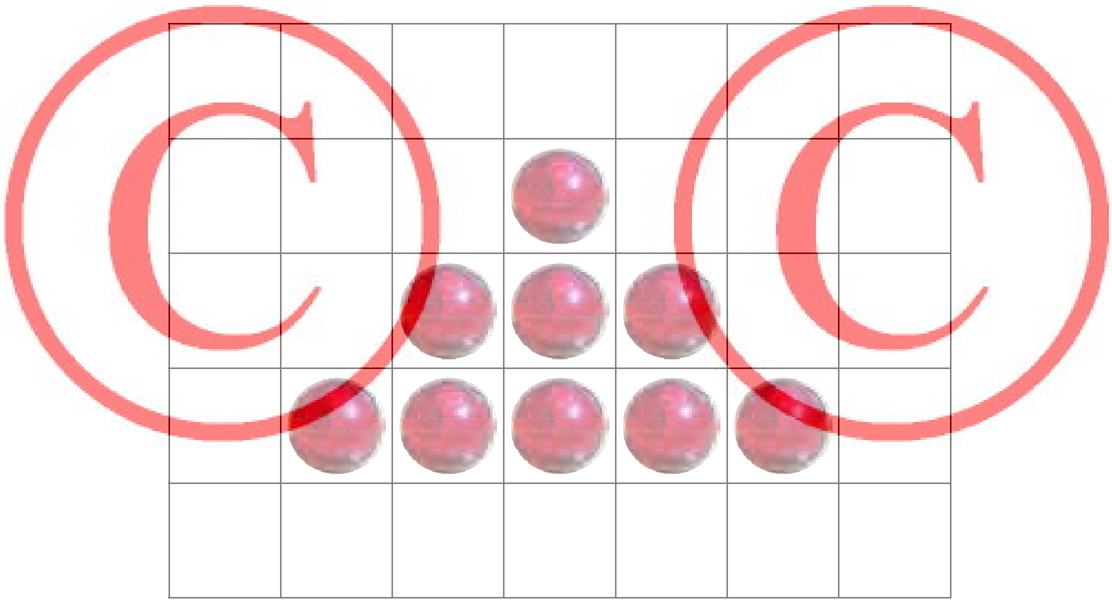
Beispiel:

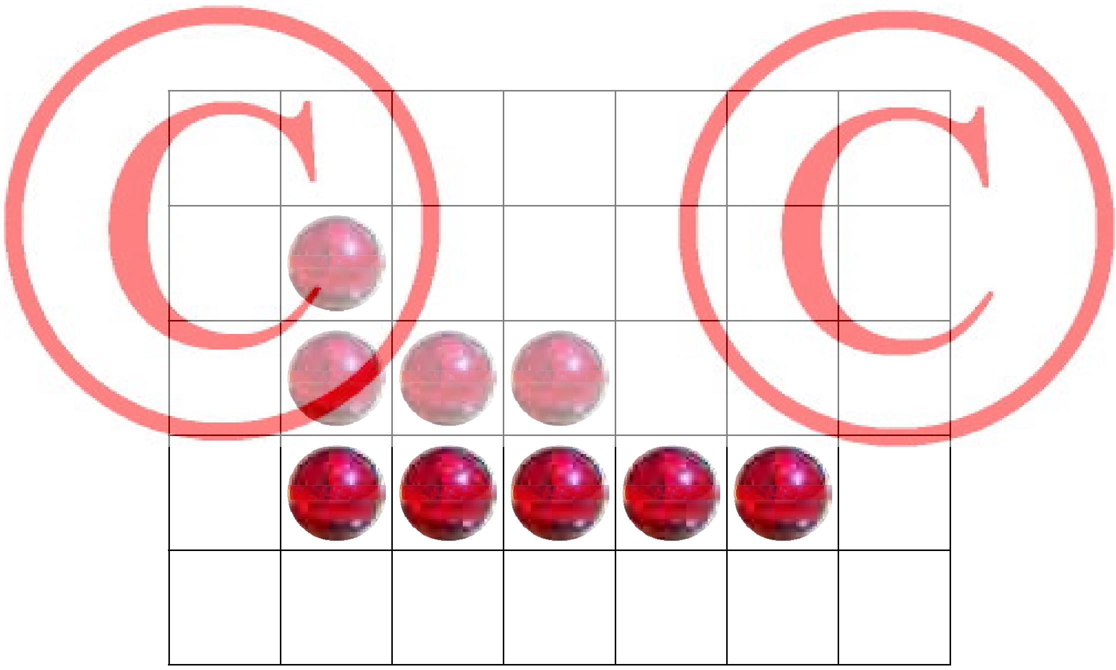
8 x Dreieckszahl von 3 (= 6) plus 1 gleich 49

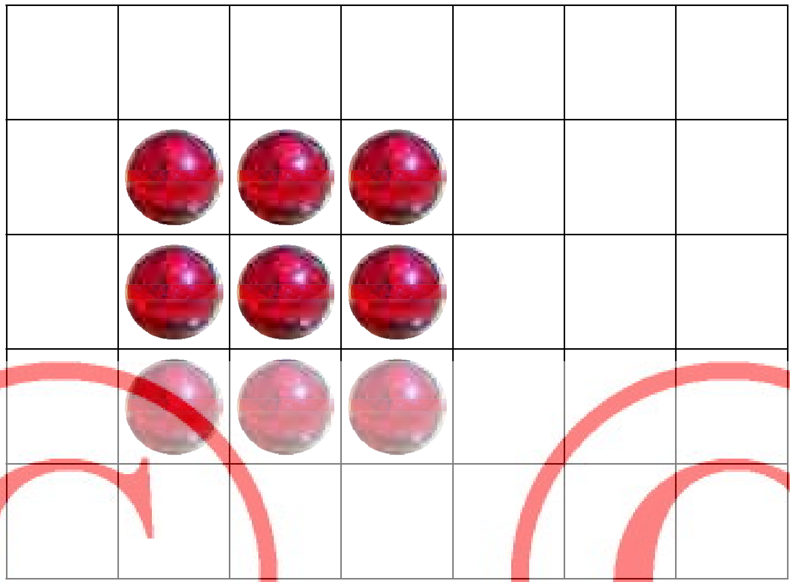
→ *Überprüfe diese Aussage mit mehreren Dreieckszahlen (Treppen). Zeichne deine Ergebnisse auf.*

5. Behauptung

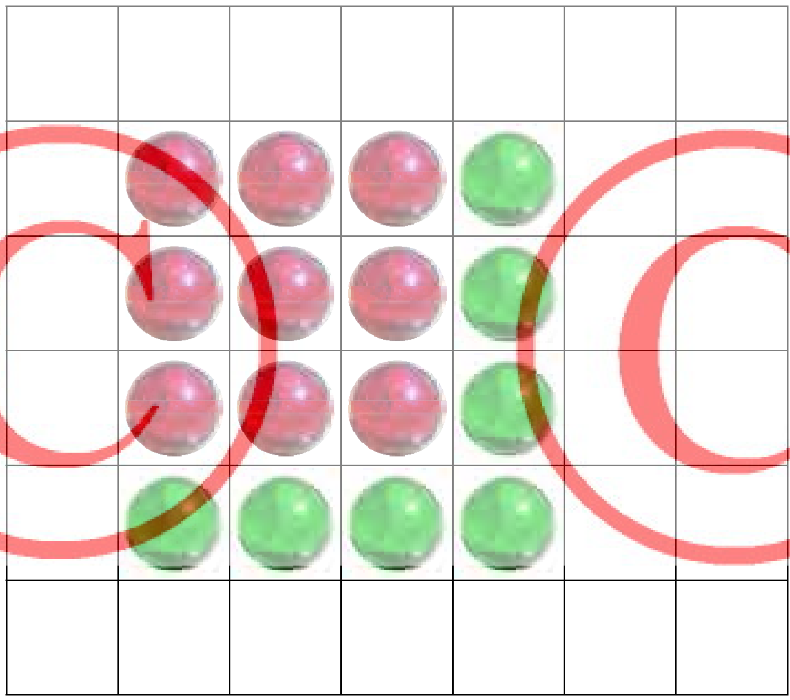
Jedes Dreieck nach dem Spaltenmodell lässt sich zu einem Quadrat umformen.







→ *Überprüfe diese Aussage mit mehreren Dreieckszahlen (Treppen).*
Zeichne deine Ergebnisse auf.



Hier wurde zu dem roten 5er-Dreieck die nächste 7er-Reihe (grün) dazugelegt.

5. Formeln

→ *Wende folgende Formeln mit verschiedenen Ausgangszahlen an:*

1. **Ich habe ein Dreieck (eine Treppe) mit einer bestimmten Anzahl (n) von Reihen gelegt und möchte wissen, wie viele Kugeln (M) es insgesammt sind.**

$$M = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Man kann die Formel auch so umschreiben:

$$M = \frac{n^2 + n}{2}$$

2. **Ich habe eine bestimmte Anzahl (M) von Kugeln und möchte wissen, wie viele Reihen (n) es gibt, wenn man alle Kugeln als Dreieck (als Treppe) legt.**

$$n = \sqrt{2M + 0{,}25} - 0{,}5$$

Anmerkungen:

Die Fragestellung lädt dazu ein, die Vorstellungskraft zu trainieren, mit Zahlen „spielerisch“ zu experimentieren und Ergebnisse präzise zu beschreiben und zu dokumentieren.
Ob die Fragestellung wirklich „interessant“ ist, ist wiederum eine eigene Frage.
immerhin lässt sich die Zahl 100 (im Spaltenmodell) wirklich als Dreieck darstellen, und das kann für manche Kinder faszinierend sein.

Tatsächlich stellte mir die Ausgangsfrage ein Schüler wenige Tage, nachdem er zur Schule kam. Er beobachtete andere Kinder, wie sie auf dem Wurzelbrett Quadratzahlen legten. Dieses System hatte er sofort durchschaut – es war für ihn banal. Mit der ihm eigenen Intellektualität beschäftigte ihn aus unerfindlichen Gründen die Dreiecksdarstellung. Er konnte aber „im Kopf“ nicht entscheiden, ob sich 100 als Dreieck legen lässt. Der Impuls zum systematischen Probieren und exakten Legen musste vom Lehrer kommen, so dass sich der Junge die Frage schließlich mit Genugtuung selbst beantworten konnte.

Dass es zwei unterschiedliche Dreiecksstrukturen zum Auslegen gibt, ist zunächst verwirrend. Man muss sich die Modelle gut klar machen.

Ich beginne mit dem – mathematisch etwas komplizierteren – „Spaltenmodell“, weil es sich so schön auf dem Wurzelbrett legen lässt und weil es eine direkte Anknüpfung an die Arbeit mit den Quadratzahlen ist.

Lösungen „Spaltenmodell“:

Reihe	Perlen in der Reihe	Summe ganzes Dreieck **„Dreieck-Zahlen“**
1	1	**1**
2	3	**4**
3	5	**9**
4	7	**16**
5	9	**25**
6	11	**36**
7	13	**49**
8	15	**64**
9	17	**81**
10	19	**100**
11	21	**121**

Das Ergebnis ist verblüffend: Die gefundenen „Dreieckzahlen“ sind identisch mit den Quadratzahlen! Das heißt, jede Quadratzahl lässt sich auch als Dreieck darstellen. Die Zeilenzahl für eine bestimmte Menge ist beim Quadrat und Dreieck gleich; sie ist die Wurzel der Perlenmenge.

Lösung „Lückenmodell“:

Reihe	Perlen in der Reihe	Summe ganzes Dreieck **„Dreieck-Zahlen“**
1	1	**1**
2	2	**3**
3	3	**6**
4	4	**10**
5	5	**15**
6	6	**21**
7	7	**28**
8	8	**36**
9	9	**45**
10	10	**55**
11	11	**66**
12	12	**78**
13	13	**91**
14	14	**105**

Korrekterweise werden in der Mathematik nur die Zahlen dieser Reihe als Dreieckszahlen bezeichnet.

Hier ist das Ergebnis zunächst weniger spektakulär. Die 100 lässt sich leider nicht als Dreieck aus natürlichen Zahlen darstellen. Dennoch fällt dem Montessorilehrer die Ergebnisreihe sofort auf. Es ist die Zahlenreihe, die man von einigen Materialien her kennt: Beim Auslegen der Stellenwerte mit dem Goldenen Perlenmaterial (wie viele Tausender brauche ich?) oder bei Füllen des Spindelkastens (wie viele Spindeln brauche ich insgesamt? – nämlich 55) .

Versierte Mathematiker in der Sekundarstufe würden jetzt noch passende Formeln für die Zahlenreihen suchen und herleiten. Es ist hier die Summe der aufeinander folgenden natürlichen Zahlen, die als „Gaußsche Summenformel“ bekannt wurde. Das ginge aber über die Fragestellungen und die Handlungserfahrungen der Grundschule hinaus.

Die Geschichte aus dem Jahr 1784 dazu kann man unter Umständen trotzdem erzählen: Im Alter von sieben Jahren sei Carl Friedrich Gauß in die Volksschule gekommen. Dort habe sein Lehrer Büttner seinen Schülern zur längeren Beschäftigung die Aufgabe gestellt, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Carl Friedrich habe sie allerdings nach kürzester Zeit gelöst, indem er 50 Paare mit der Summe 101 gebildet (1 + 100, 2 + 99, …, 50 + 51) und 5050 als Ergebnis erhalten habe. Er legte die Antwort mit den Worten in Braunschweiger Plattdeutsch „Ligget se“ (svw: „Hier liegt sie“) dem Lehrer auf den Tisch.

Man kann die Formel folgendermaßen veranschaulichen: Man schreibt die Zahlen von 1 bis n aufsteigend in eine Zeile. Darunter schreibt man die Zahlen in umgekehrter Reihenfolge (im Beispiel n = 11).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Die Summe der Spalten im Beispiel ergibt jeweils den Wert 12. Allgemein ergibt sich ein Wert von n + 1. Da es n Spalten sind, ist die Summe der Zahlen beider Zeilen gleich $n \cdot (n + 1)$.

Um die Summe der Zahlen einer Zeile zu ermitteln, wird das Ergebnis halbiert, und es ergibt sich die Formel:

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$

(Quelle: Wikipedia)

Wir würden nun gerne wissen, wie viele Reihen man für ein Dreieck aus 100 Perlen braucht. Leider ist dies nur mit dem Rechenverfahren der „Quadratischen Ergänzung“ lösbar – also mit Methoden der Sekundarstufen-Mathematik:

Gegeben sei die Menge M der Perlen. Gesucht ist die Seitenzahl des Dreiecks n.

$M = \frac{n^2 + n}{2}$

$n^2 + n = 2M$ | p = 1; Die quadratische Ergänzung ist $0{,}5^2$

$n^2 + n + 0{,}5^2 = 2M + 0{,}25$

$(n + 0{,}5)^2 = 2M + 0{,}25$

$n + 0{,}5 = \sqrt{2M + 0{,}25}$

$n = \sqrt{2M + 0{,}25} - 0{,}5$

Beispiele:

M = 55; n = 10

M = 100; n = 13,65… (geht nicht mit natürlichen Zahlen)

© ©

© ©

Impressum:
© Markus Wurster, 2011
markuswurster@gmx.de
www.markuswurster.de

Kopiervorlage: