

Geometrie der Polygone

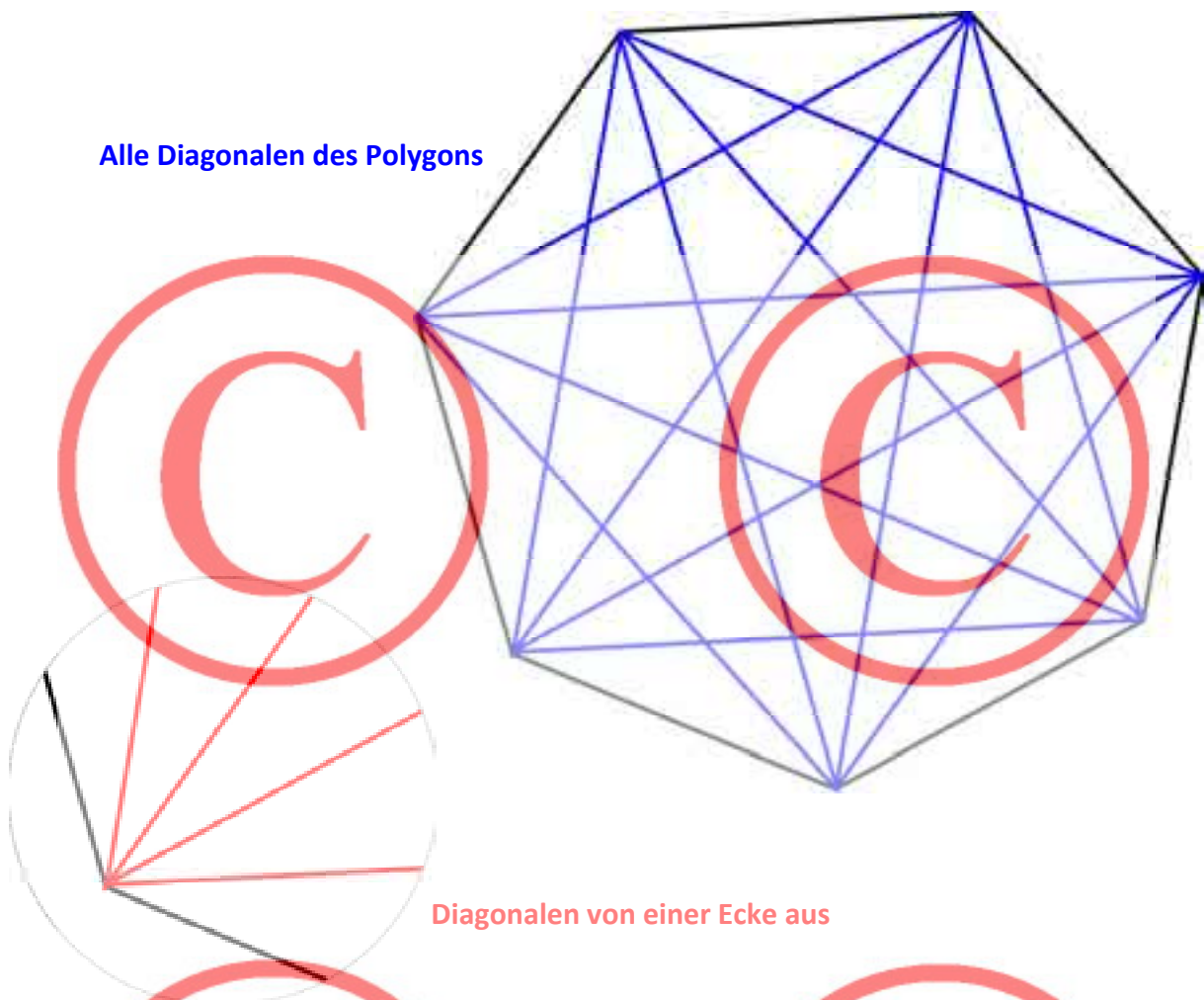


Teil 2

Diagonalen und Verbindungslinien



Die Diagonalen im Polygon



In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den Diagonalen in einem Polygon. Zeichnet man alle Diagonalen in einem Vieleck, kann man erstaunliche Beobachtungen machen:

- Wie die Anzahl der Diagonalen mit der Anzahl der Ecken des Polygons wächst.
- Wie man die Diagonalen zählen kann.
- Wie man Formeln für die Anzahl der Diagonalen verwenden kann.
- Welche geometrische Form sich im Inneren des Polygons ergibt.

Definitionen

Bilde aus den folgenden Satz-Bausteinen zwei Definitionen.
Schreibe die beiden Definitionen in dein Mathe-Heft.

Regelmäßige **Polygone** sind

Diagonalen sind

Vielecke mit

die geraden Verbindungslinien

gleich langen Seiten

in einem Polygon

von nicht nebeneinander liegenden Ecken

und gleich großen Winkeln

Lösungen der Definitionen

Regelmäßige *Polygone* sind Vielecke mit gleich langen Seiten und gleich großen Winkeln.

***Diagonalen* sind die geraden Verbindungslinien in einem Polygon von nicht nebeneinander liegenden Ecken.**

Arbeitsheft

→ **Verwende für die weitere Arbeit das vorbereitete Arbeitsheft. Auf den nächsten Seiten sind die Kopiervorlagen.**

Überlegungen zum Heft

- **Bild der Diagonalen:**

Bei manchen Formen entsteht ein „Loch“ in der Mitte, bei anderen ein „Stern“. *Warum ist das so?*

- **Form des „Loches“:**

Bei größerer Eck-Zahl ist es schwer zu erkennen, aber bei kleinerer Eck-Zahl ist deutlich, dass die Form des „Loches“ der äußeren Form entspricht (gleiche Eck-Zahl; gleiche Seiten-Zahl).

Warum ist das so? Ist das bei jeder Form so?

- **Tabelle:**

Hast du eine Regel erkannt? Überprüfe damit deine Ergebnisse.

- **Zahl der Diagonalen:**

Wie hast du die Diagonalen gezählt?

Bei den größeren Figuren wird das Bild schnell sehr unübersichtlich (das Vierzehneck hat 77 Diagonalen!).

- **Formeln:**

Verwende die Formeln auf der Rückseite des Arbeitsheftes.

Stimmen die errechneten Ergebnisse mit deinen Zählungen überein?

Errechne die Diagonalezahl auch für ein 15- und 16-Eck und trage die Ergebnisse in die Tabelle ein.

→ Schreibe deine Ergebnisse und Überlegungen in das Arbeitsheft.

Anregungen zum Besprechen:

- **Bild der Diagonalen:**

Bei manchen Formen entsteht ein „Loch“ in der Mitte, bei anderen ein Stern. Warum?

- Erklärungsversuch: gerade/ungerade Eck-Zahl; Diagonalen durch den Mittelpunkt

- **Form des „Loches“:**

Bei größerer Eck-Zahl schwer zu erkennen, bei kleinerer Eck-Zahl ist deutlich, dass die Form des „Loches“ der äußeren Form entspricht (gleiche Eck-Zahl; gleiche Seiten-Zahl). Warum? Ist das bei jeder Form so?

- Erklärungsversuch: Die innere Form wird durch Linien gebildet, die von jeder Ecke aus in der genau gleichen Weise verlaufen; so entstehen innen gleich viele Seiten und Winkel wie außen...

- **Tabelle:**

Hast du eine Regel erkannt?

Fehler beim Abzählen fallen in den Spalten „Veränderung“ als Unregelmäßigkeit auf.

Die korrekte Tabelle:

Ecken	Seiten	Diagonalen von einer Ecke aus	Veränderung	alle Diagonalen	Veränderung
3	3	0	/	0	/
4	4	1	+1	2	+2
5	5	2	+1	5	+3
6	6	3	+1	9	+4
7	7	4	+1	14	+5
8	8	5	+1	20	+6
9	9	6	+1	27	+7
10	10	7	+1	35	+8
11	11	8	+1	44	+9
12	12	9	+1	54	+10
13	13	10	+1	65	+11
14	14	11	+1	77	+12
15	15	12	+1	90	+13
16	16	13	+1	104	+14

- **Die Zählbarkeit der Diagonalen:**

Bei der Fehlersuche in der Tabelle stellt sich schnell die Frage, wie man die Diagonalen überhaupt zählen kann. Ein Schüler kam selbst auf eine klare Methode:

Am Beispiel des Neunecks:

Ich beginne an einer Ecke A – hier gibt es 6 Diagonalen.

Die benachbarte Ecke B hat keine gemeinsame Diagonale mit Ecke A, also auch 6.

Die nächste Ecke C hat eine Diagonale mit Ecke A gemeinsam (die schon gezählt wurde), also nur noch 5.

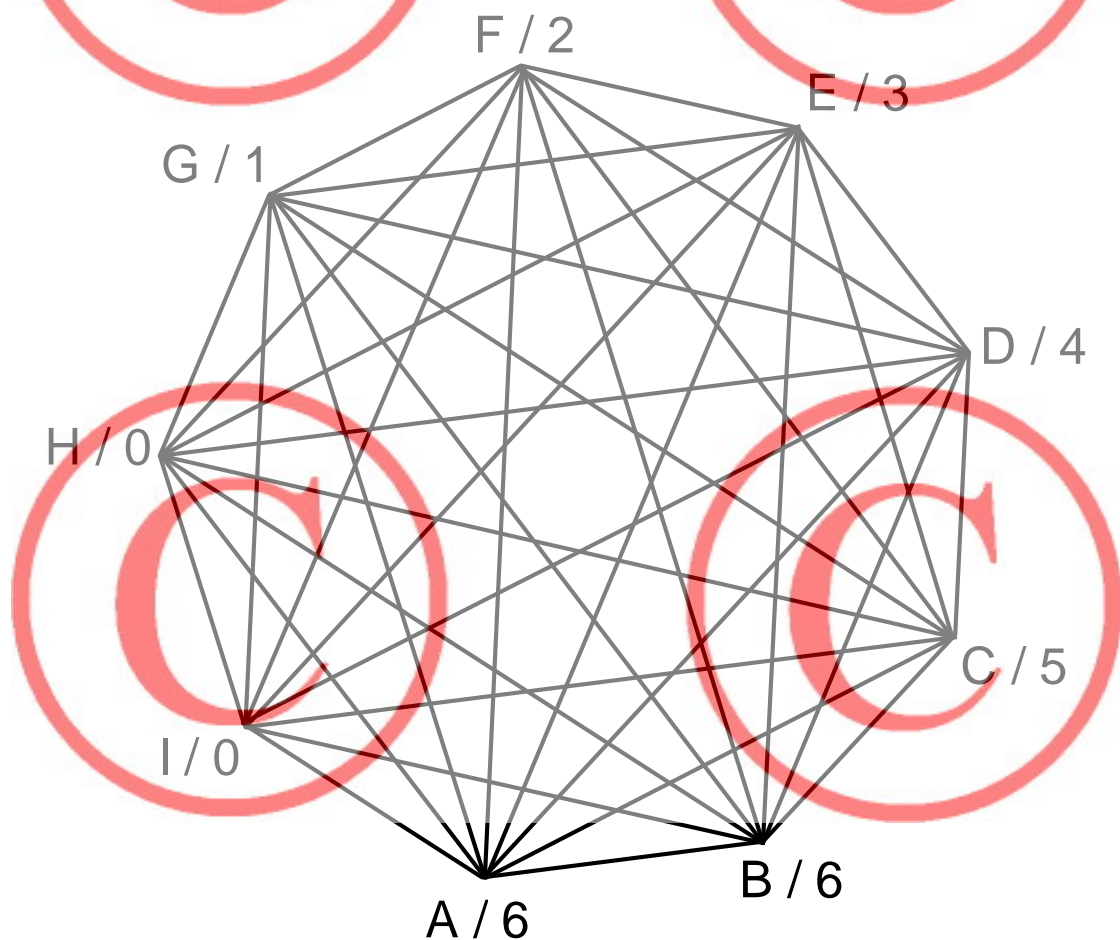
Ecke D hat je eine Diagonale mit Ecke A und Ecke B gemeinsam, also noch 4.

Und so weiter.

Die Ecken H und I haben keine neuen Diagonalen mehr.

Wenn ich zu jeder Ecke die noch nicht gezählten Diagonalen schreibe, kann ich die Zahlen leicht zusammenzählen: $6+6+5+4+3+2+1=27$

Diese Methode geht bei jedem Polygon.



- **Formeln:**

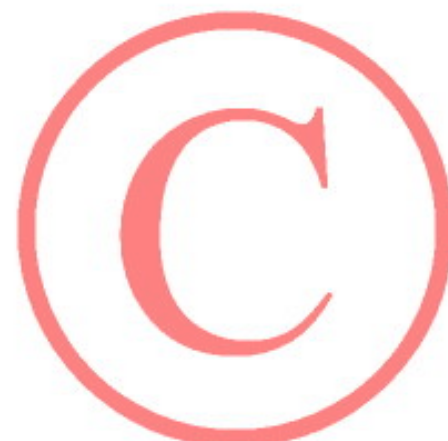
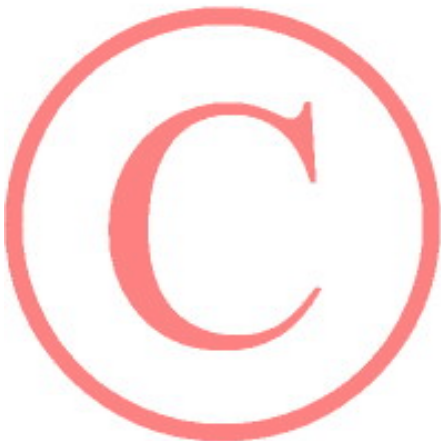
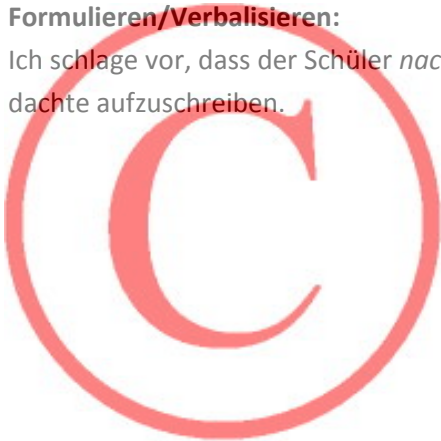
Die Formeln brauchen nicht hergeleitet, erklärt oder bewiesen werden. Aber sie können angewendet und überprüft werden. **Stimmt diese Formel? Lässt sich die Reihe damit fortsetzen?**

Die Formel für die Diagonalenanzahl aus einer Ecke ($n-3$) kann man immerhin noch durch die Vorstellung nachvollziehen: Die betreffende Ecke und deren Nachbarecken zählen nicht; für alle anderen Ecken gibt es genau eine Diagonale.

Mit Hilfe der Formeln kann die letzte Zeile der Tabelle (Fünfeck) ausgefüllt und der Wert mit der Kontrollreihe verglichen werden.

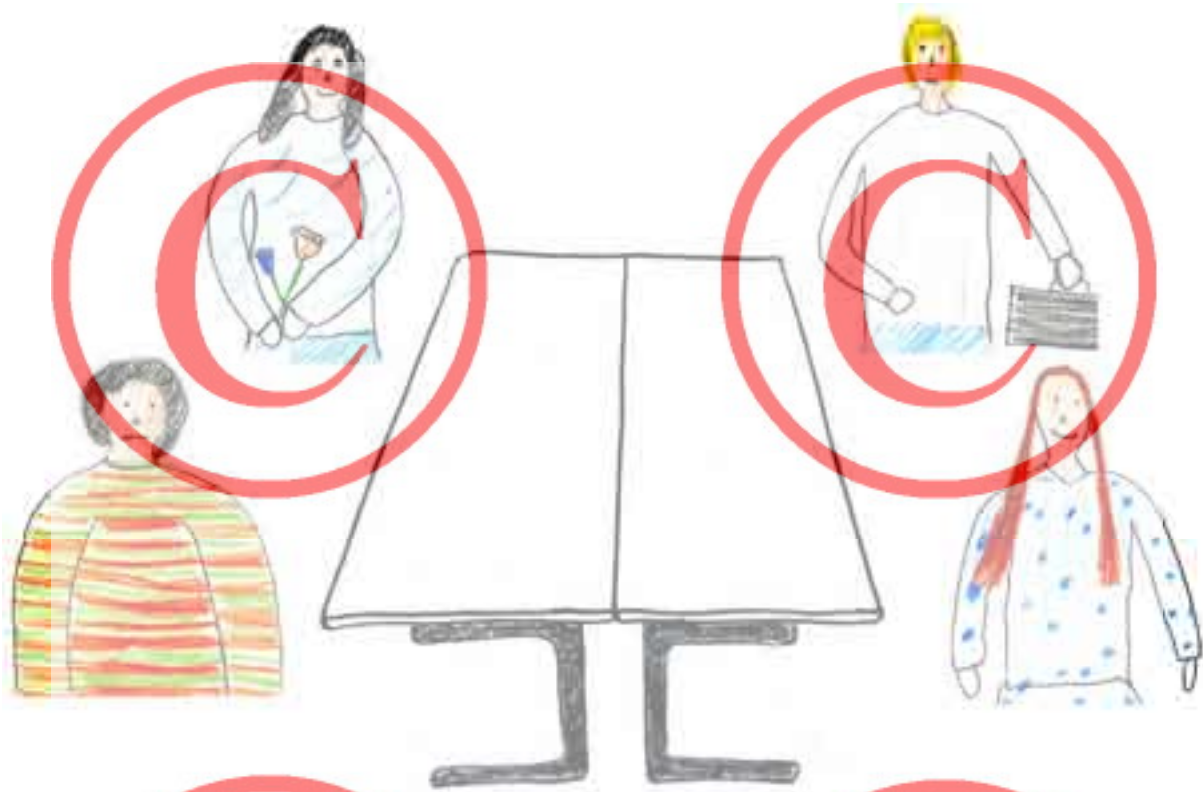
- **Formulieren/Verbalisieren:**

Ich schlage vor, dass der Schüler *nach* der Besprechung versucht, das Herausgefundene und Gedachte aufzuschreiben.



Eine praktische Anwendung: Kombinationen

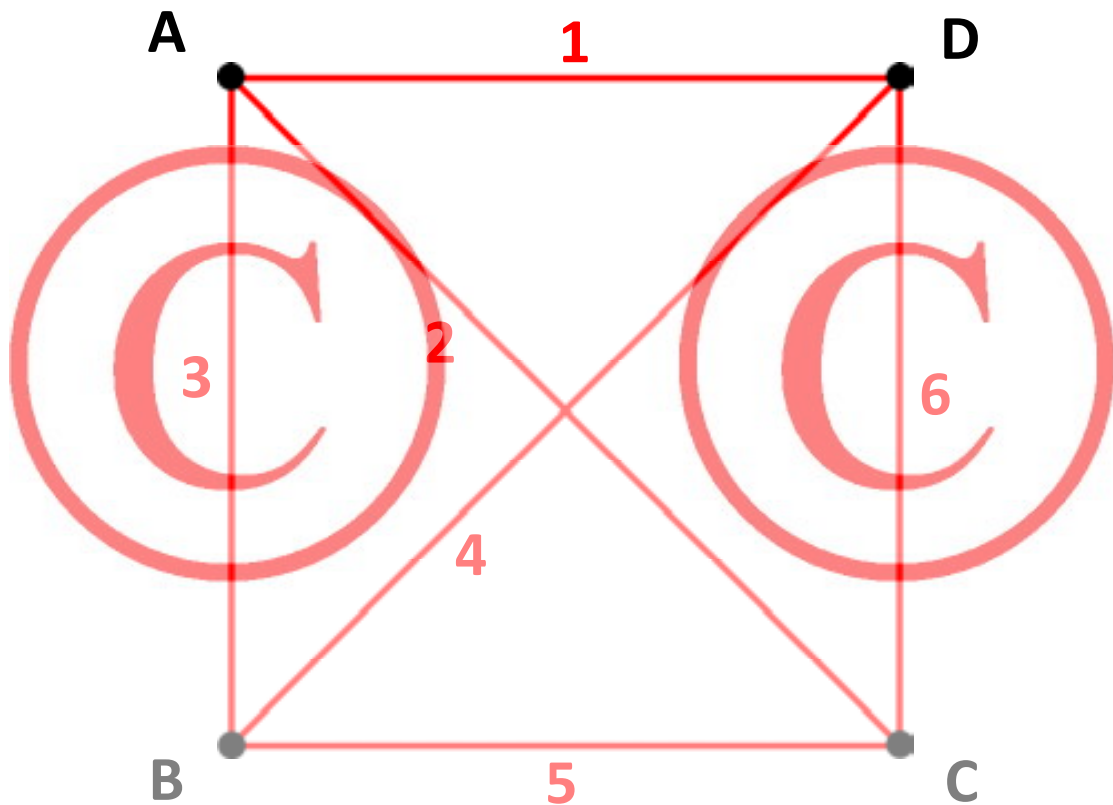
Du sitzt im Klassenzimmer an einem Vierertisch.
Für eine Arbeit wollt ihr Zweier-Teams bilden.



→ **Wie viele verschiedene Möglichkeiten für ein Zweier-Team gibt es?**

- Bitte andere Kinder, mit dir diese Aufgabe nachzustellen.
Ihr könnt einen Wollfaden verwenden: Spannt einen Faden zwischen allen möglichen Partnern.
- Du kannst die Kopiervorlage (S.13) verwenden: Schneide die Einzelbilder aus und klebe alle Zweierteams auf ein Papier.

Man kann dieses Problem geometrisch darstellen: Jeder Punkt ist mit allen anderen Punkten durch eine Linie verbunden. Jede Linie stellt ein Team dar.



Erkennst du wieder, was wir bei den Diagonalen erforscht haben?

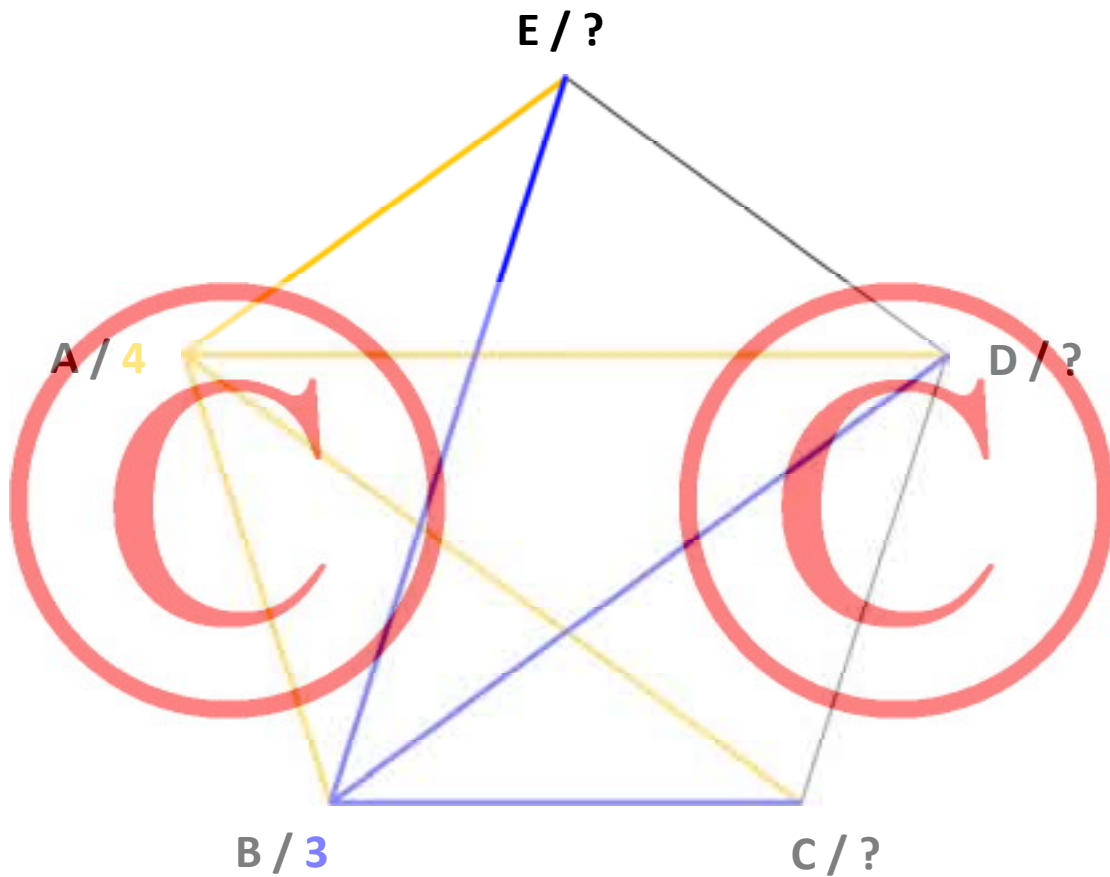
Der Unterschied ist, dass wir hier alle möglichen Linien suchen müssen – die **Diagonalen** und die **Seitenlinien**.

→ **Löse geometrisch:**

Wie viele verschiedene Zweierteams kann man aus einer Dreiergruppe bilden?

Wie viele verschiedene Zweierteams kann man aus einer Fünfergruppe bilden?

Zählweise aller Linien im Polygon: Jede Linie darf nur einmal gezählt werden.



→ Zeichne die Linien von einem Punkt aus mit einer Frabe und zähle alle Linien.

Trage die Ergebnisse in die Tabelle ein.

Findest du in der Spalte „Veränderung“ eine Regelmäßigkeit?

Gruppengröße (Anzahl der Ecken)	Mögliche Zweierteams (Linienzahl)	Veränderung
2		-----
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Stelle dir vor, ihr wollt aus allen Kindern deiner Klasse ein Zweierteam bilden. Es gibt sehr viele Möglichkeiten...

→ *Kannst du eine Tabelle bis zur Größe deiner Klasse fortsetzen? Du brauchst jetzt nicht mehr zu zeichnen. Die Spalte „Veränderung“ hilft dir, die Linienzahl zu ermitteln.*

→ *Findest du eine Formel um die Zweier-Kombinationen ausrechnen zu können? (Du musst nur die Formel von den Diagonalen an einer Stelle verändern.)*

Lösung:

(verdeckt unter einer Lasche zum Anheben)

$$\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

Die Mathematiker nennen unsere Aufgabe so:

Die Kombination von 2 aus n (Größe der Gruppe)

Anmerkung: Genau genommen handelt es sich hier um eine „Kombination ohne Wiederholung“, d. h. ein Element der Gruppe kann nicht mit sich selbst kombiniert werden.

Auf die korrekte Formel $C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

wird hier selbstverständlich verzichtet. Der Zusammenhang hier ist die pragmatische Anwendung geometrischer Darstellungen und Denkformen.

Kopiervorlage: Ausschneidebogen

