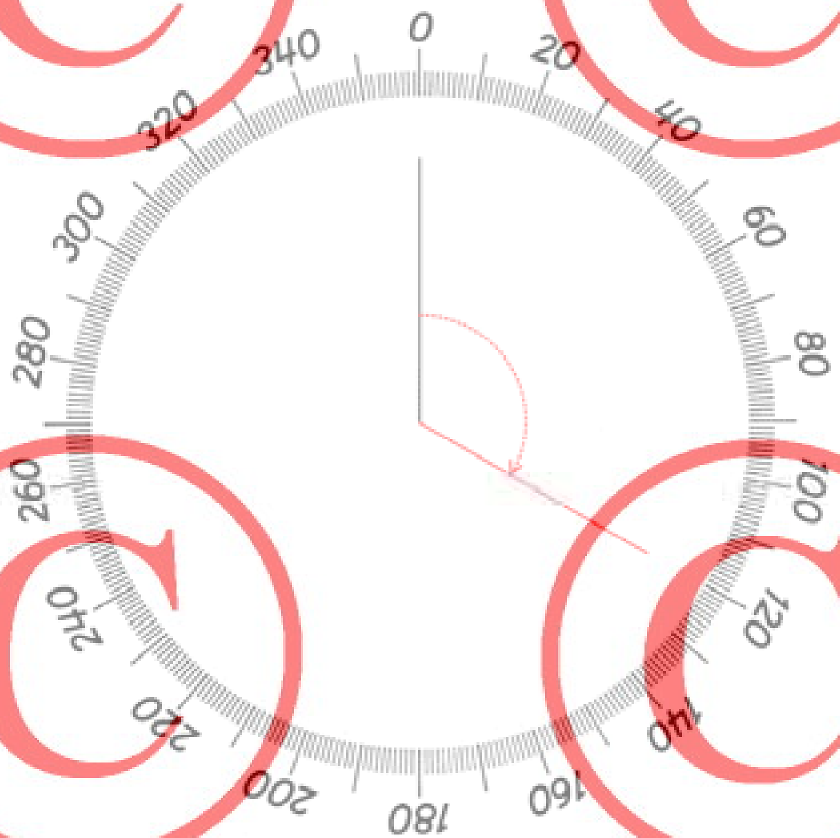
Winkel messen und zeichnen

Winkel werden in „Grad“ gemessen. Das Zeichen dafür ist ein kleiner, hochgestellter Kreis (°).
Die Winkel-Maßeinheit „Grad“ hat nichts mit der Temperatur zu tun. Sie heißt nur ähnlich. Bei der Temperatur ist die Maßeinheit „Grad Celsius“ (°C).
Ein rechter Winkel misst 90°.
Der rote Winkel in der Grafik unten misst 120°.
Ein Vollwinkel entspricht einem ganzen Kreis und misst 360°.

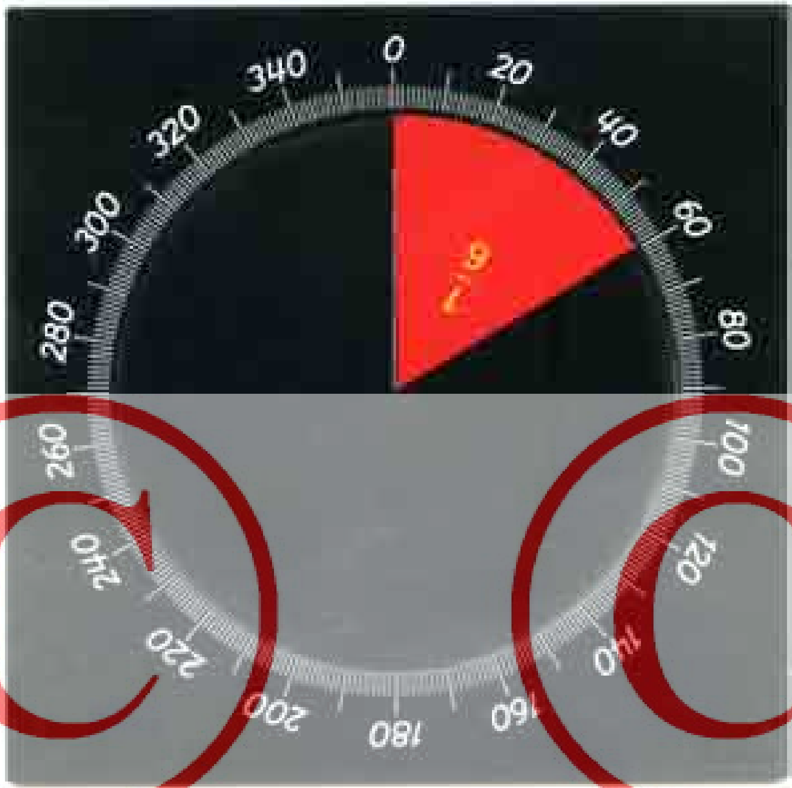


Warum gerade 360°?

Das hat historische Gründe. Die Einteilung in 360° stammt von den Sumerern aus dem 3. Jahrtausend vor Christus (siehe ab Seite 6).

Nach der Französischen Revolution von 1789 wollten einige Mathematiker die Grad-Einteilung modernisieren. Sie schlugen für den Vollwinkel 400 „Neugrad“ vor. Aber dieser Vorschlag konnte sich nicht durchsetzen – die alte Einteilung war der Allgemeinheit schon viel zu sehr vertraut.

Welche Winkel haben die Bruchrechenkreise?



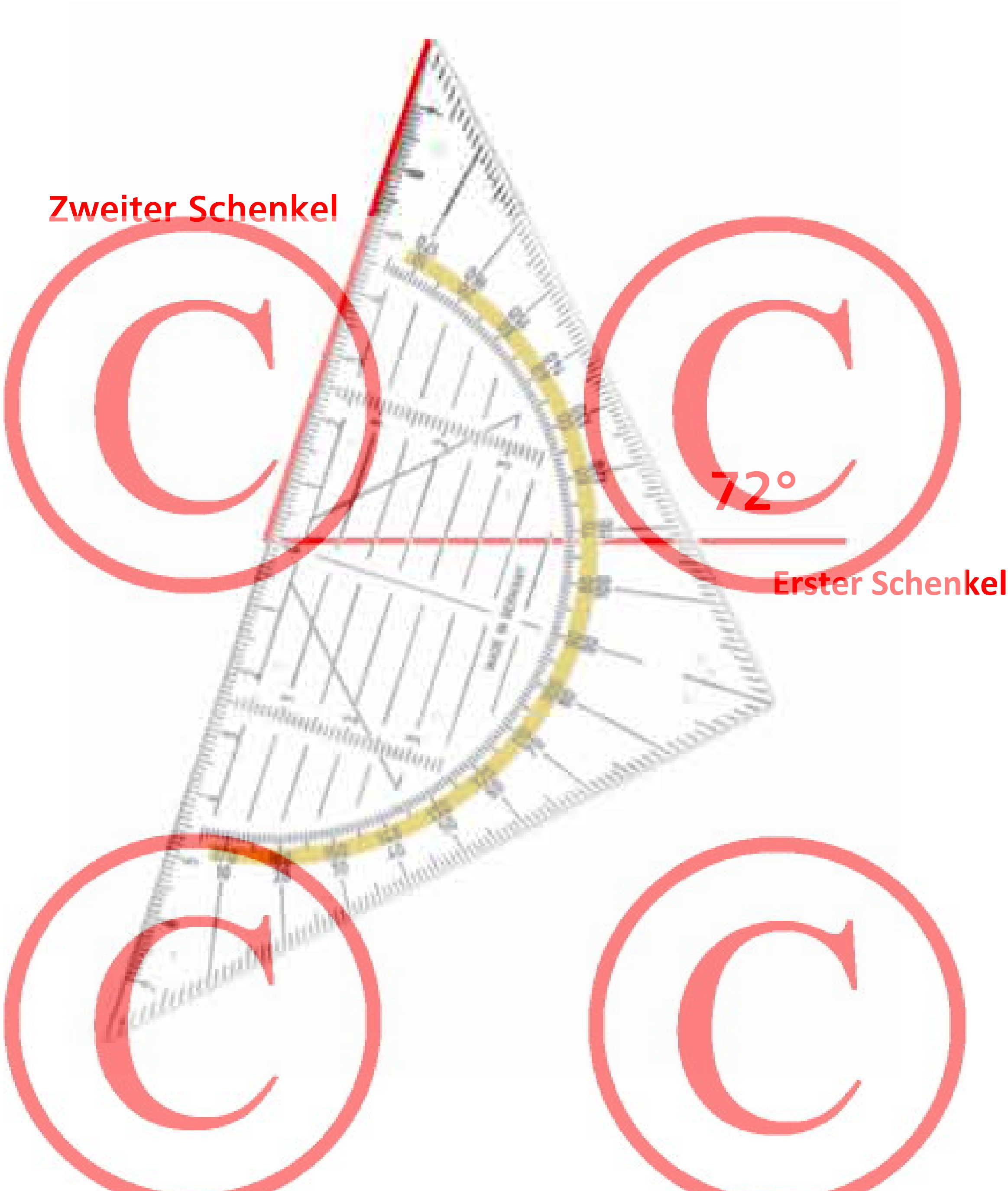
Winkelmesser 360°

→ ***Miss alle Winkel der Bruchrechenkreise.***

Schreibe so ins Geometrieheft:		
$\frac{1}{6}$	Gemessener Winkel: 60°	Kontrolle: 360° : 6 = 60°
…		

Wenn man noch kleinere Winkel als 1° angeben möchte, unterteilt man den 1°-Winkel in 60’ (Bogenminuten) und 1 Bogenminute wiederum in 60’’ (Bogensekunden) – wie bei der Uhr mit Stunden, Minuten und Sekunden. Ein sehr genaues Winkelmaß heißt dann z. B. 43°35’49’’.

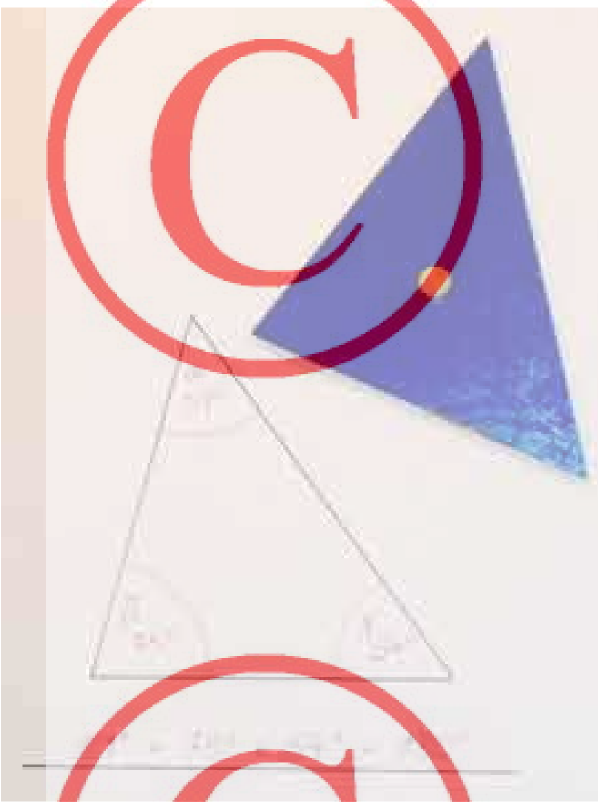
Winkel zeichnen mit dem Geodreieck

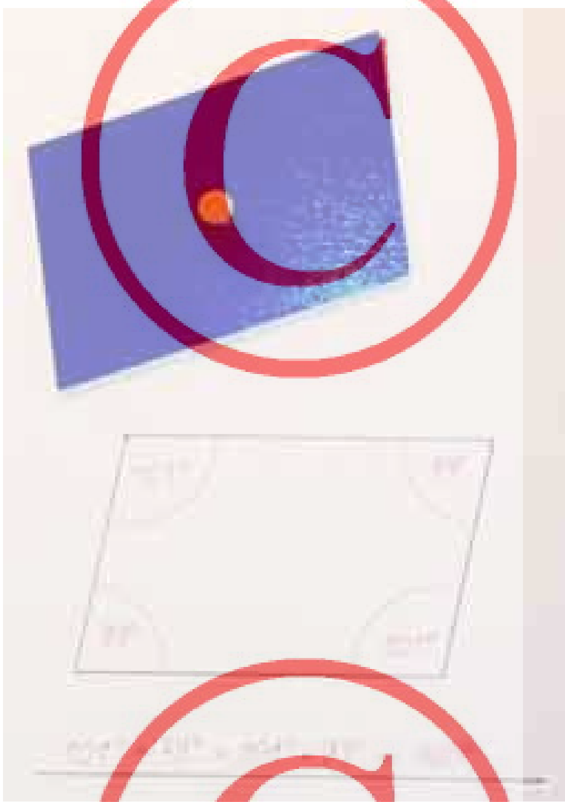


→ ***Zeichne auf diese Weise alle Winkel, die du zuvor bei den Bruchrechenkreisen ermittelt hast.***
Du kannst zur Kontrolle der Genauigkeit die roten Bruchrechenkreise auf deine Zeichnungen legen.

Winkel messen mit dem Geodreieck

→ ***Suche dir aus der Geometrischen Kommode einige Dreiecke und Vierecke aus.***
Übertrage die Form auf Papier.
Miss alle Winkel mit dem Geodreieck und schreibe sie auf.



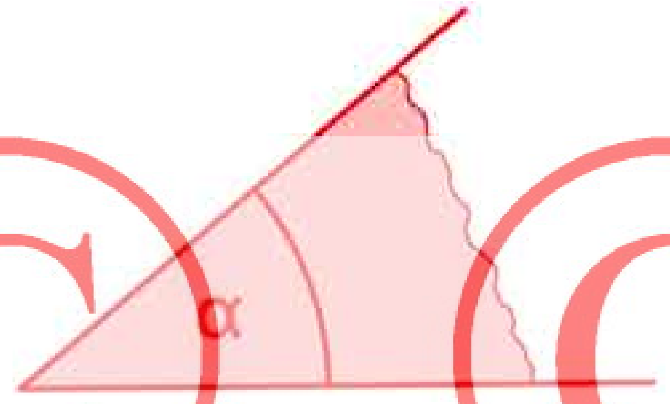


→ ***Zähle die Gradzahlen aller Winkel einer Figur zusammen.***
Was fällt dir auf? Ist das immer so?

Die Winkelsumme beim Dreieck ist _________ Grad.

Die Winkelsumme beim Viereck ist _________ Grad.

→ ***Lege das Definitionsmaterial zu den Winkeln aus.***
Übertrage die Definitionen in dein Geometrieheft.



Die Fläche zwischen zwei Strahlen
mit demselben Anfangspunkt
heißt …

Winkel

- Winkel werden in Grad (°) gemessen.
- Das Zeichen für einen Winkel ist der Bogen.
- Sie werden mit kleinen griechischen Buchstaben benannt: α (Alpha), β (Beta), γ (Gamma), δ (Delta) usw.

Exkurs: Zahlen bei den Sumerern

I. Die Basisizahl 60

Die Sumerer brachten vor 5000 Jahren die erste hoch entwickelte Kultur hervor. Sie siedelten in dem fruchtbaren Gebiet zwischen den Flüssen Euphrat und Tigris (das ist heute der Irak) und bauten die ersten großen Städte. Hier wurde die erste Schrift (Keilschrift) für Wörter und Zahlen erfunden.

Bilder: Wikipedia

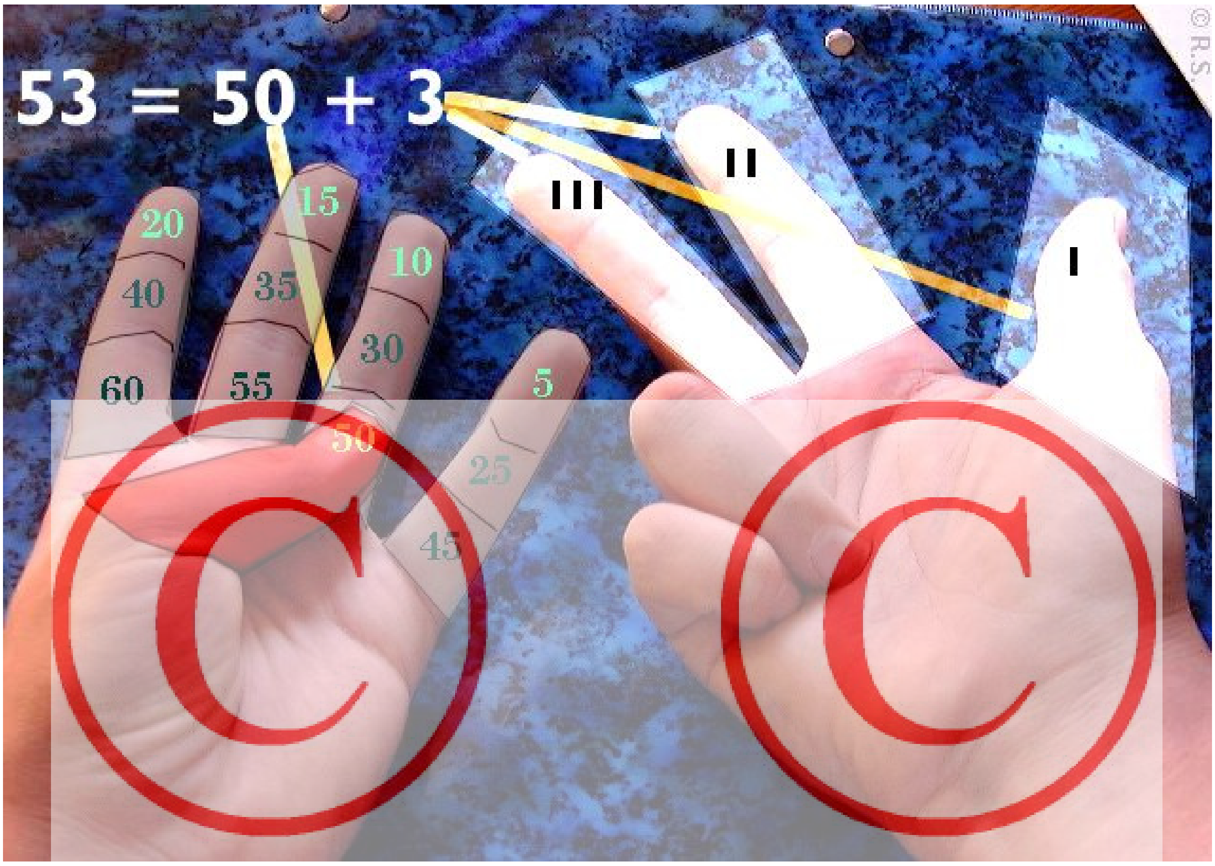


Bild: http://chessbox.de/Wissen/mathezaundzi6.html

Für die Sumerer war 60 eine besonders wichtige Zahl. Das hat damit zu tun, wie sie rechneten. Die Sumerer nahmen nämlich die Hände zu Hilfe. Mit der rechten Hand kann man mit den Fingern bis 5 zählen. Nun geht es in Fünfergruppen weiter. Jedes Fingerglied an der linken Hand steht für eine Fünfergruppe. Der linke Daumen berührt ein bestimmtes Fingerglied und markiert so eine Fünferzahl zwischen 5 und 60. Auf dem Foto ist die Zahl 53 dargestellt.

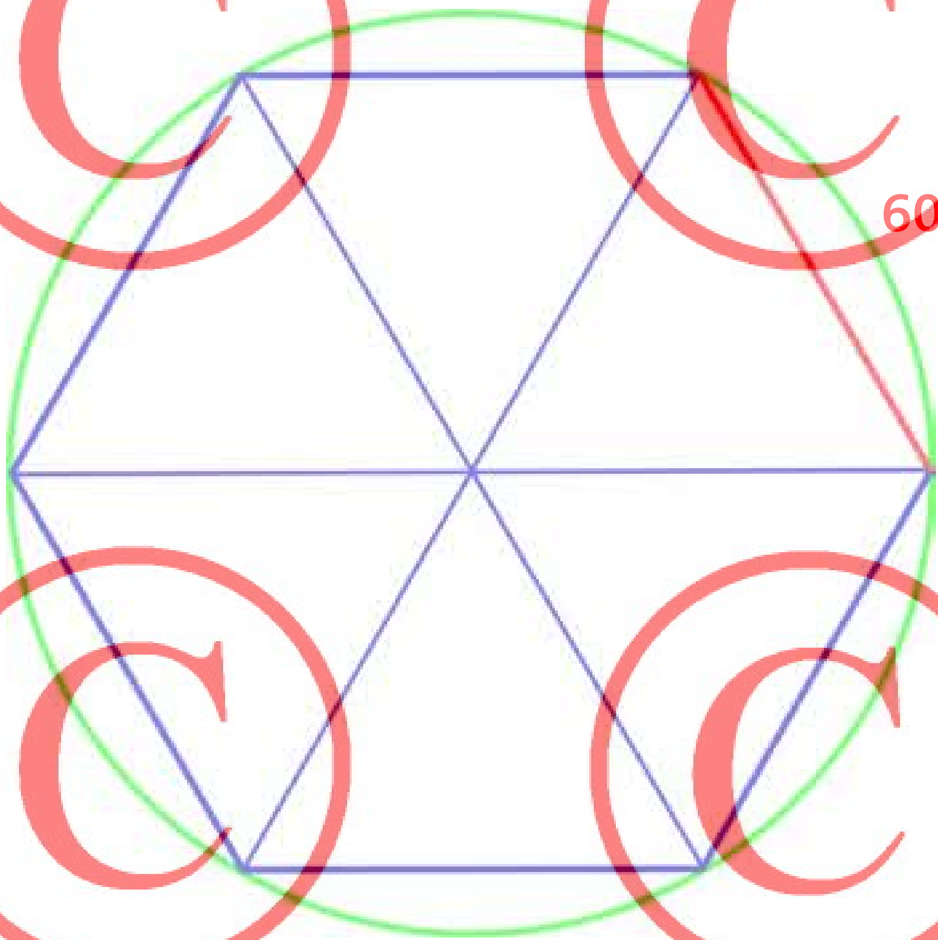
→ ***Probiere verschiedene Zahlen bis 60 aus.***

→ ***Rechne auf diese Weise Plus-Aufgaben bis 60.***

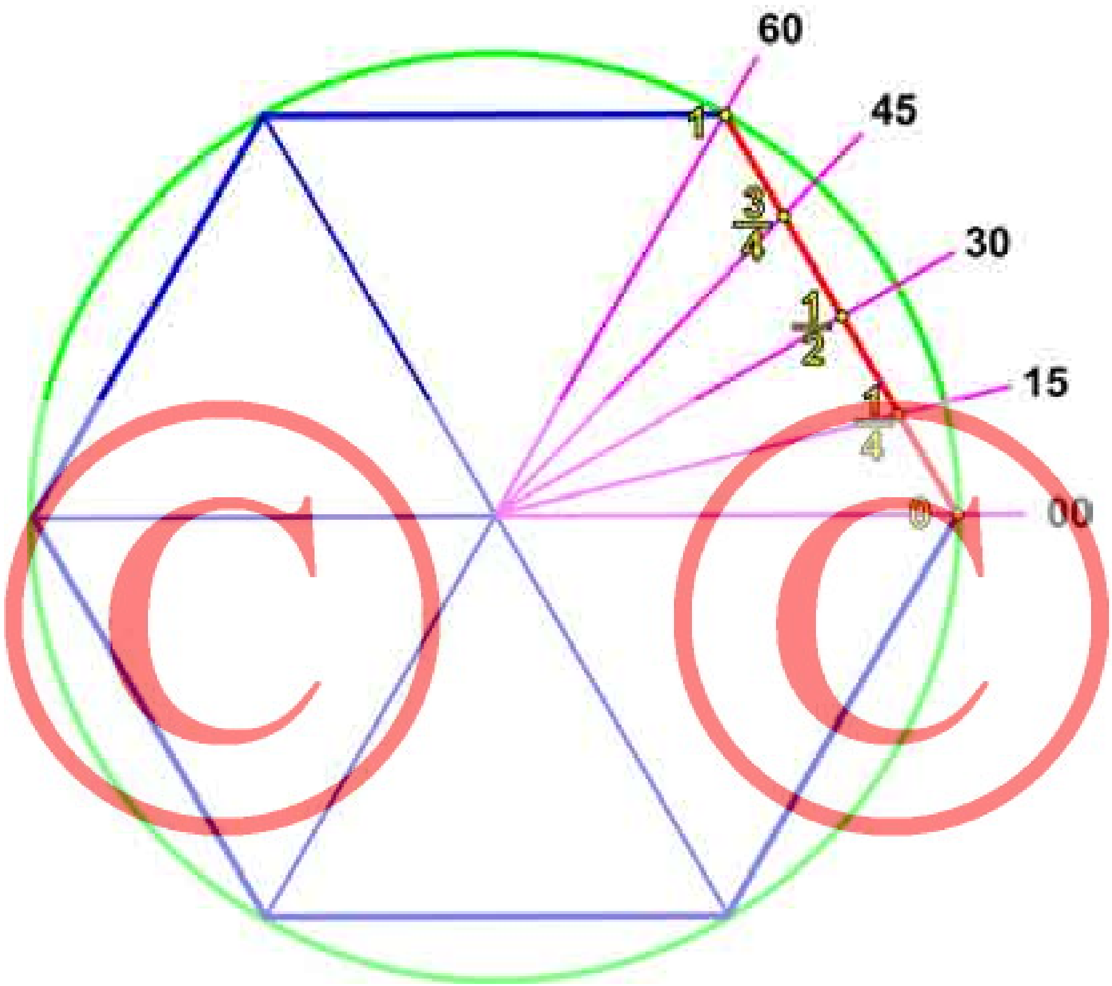
Dieses Zahlensystem mit der „Basis“ 60 nennt man „Sexagesimalsystem“.

II. Die Winkeleinteilung

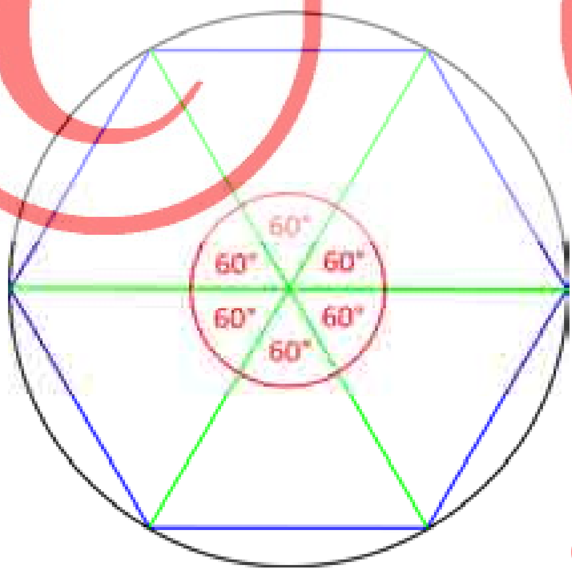
Die Sumerer unterteilten die Winkel nicht entlang der Kreislinie, sie gingen anders vor:
Sie gingen vom regelmäßigen Sechseck aus. Die Seitenlänge eines Sechsecks bildete die Grundlage. Für einen Vollwinkel braucht man 6 Mal die Seitenlänge. Die Grundseite bekam den Wert 60 – die Basiszahl im sumerischen System.



Um den Winkel eines Dreiecks zu unterteilen, teilten die Sumerer die (rote) Linie in gleichmäßige Teile. Jetzt konnte man vom Mittelpunkt aus Linien durch die Unterteilungspunkte ziehen.



Die Unterteilung bei der Hälfte der Seite wurde nun mit 30 bezeichnet. Ein Viertel entsprach 15 und Dreiviertel entsprach 45. Wenn man so weiterrechnet bis zu einem Vollkreis, ergibt sich:



$6 \cdot 60° = 360°$

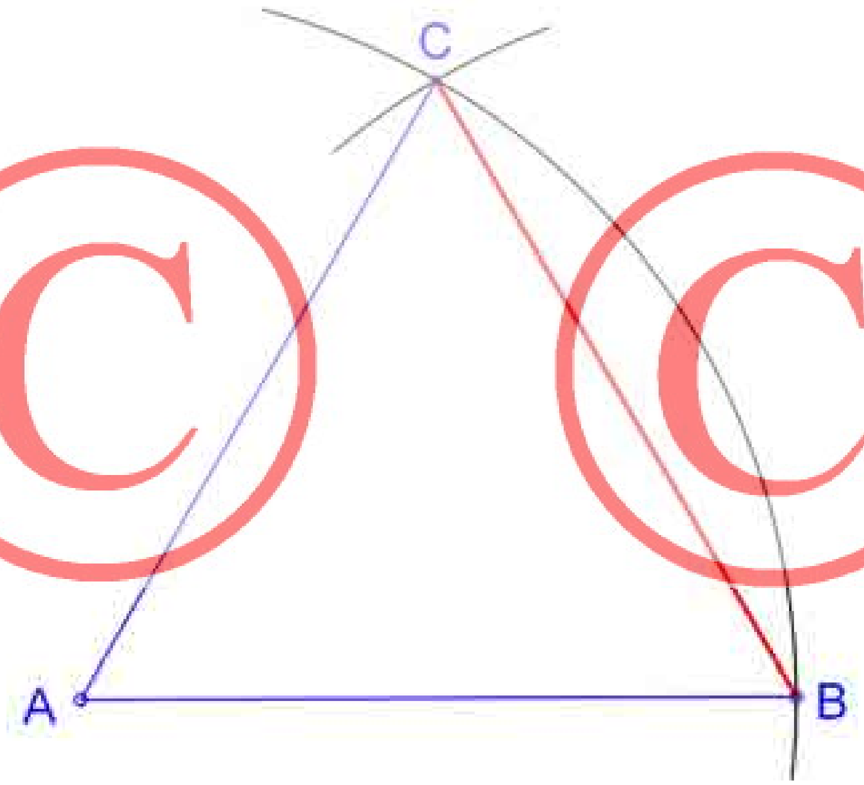
III. Ungenaue Methode

Die sumerischen Mathematiker konnten mit ihrer Erfindung in der Praxis gut umgehen und viele Probleme lösen. Aber ihre Methode beinhaltet eine Ungenauigkeit!

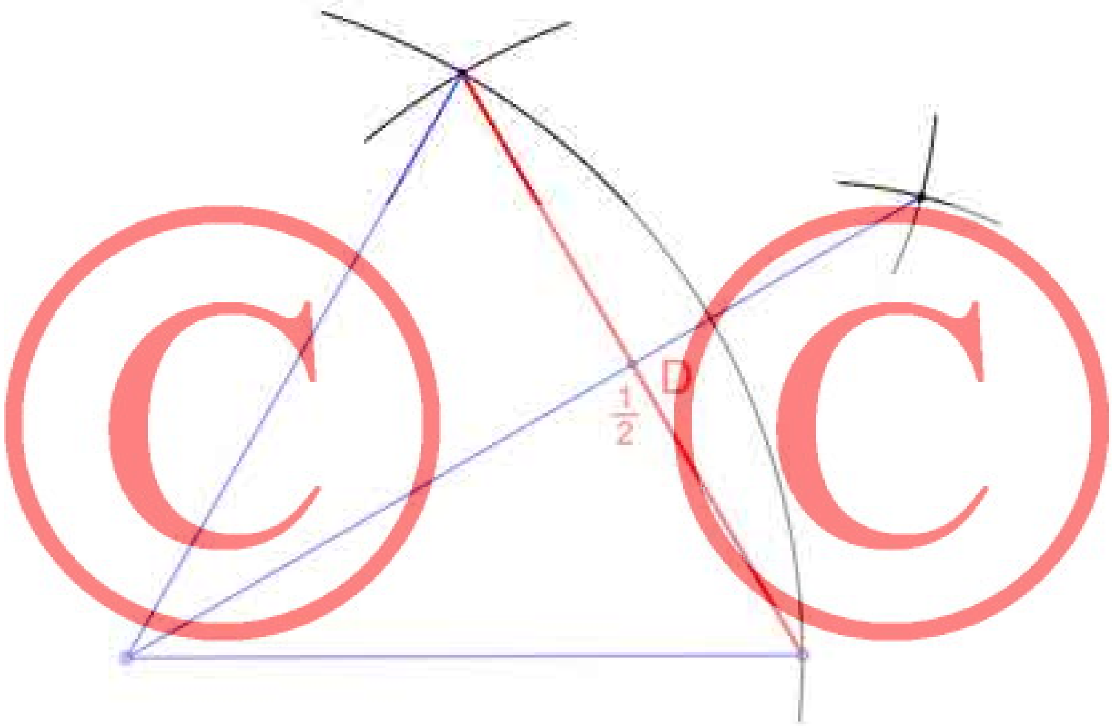
→ ***Erkennst du den Fehler?***

Du kannst den Fehler messen, wenn du einen Winkel von 45° auf die sumerische Methode konstruierst. Gehe folgendermaßen vor:

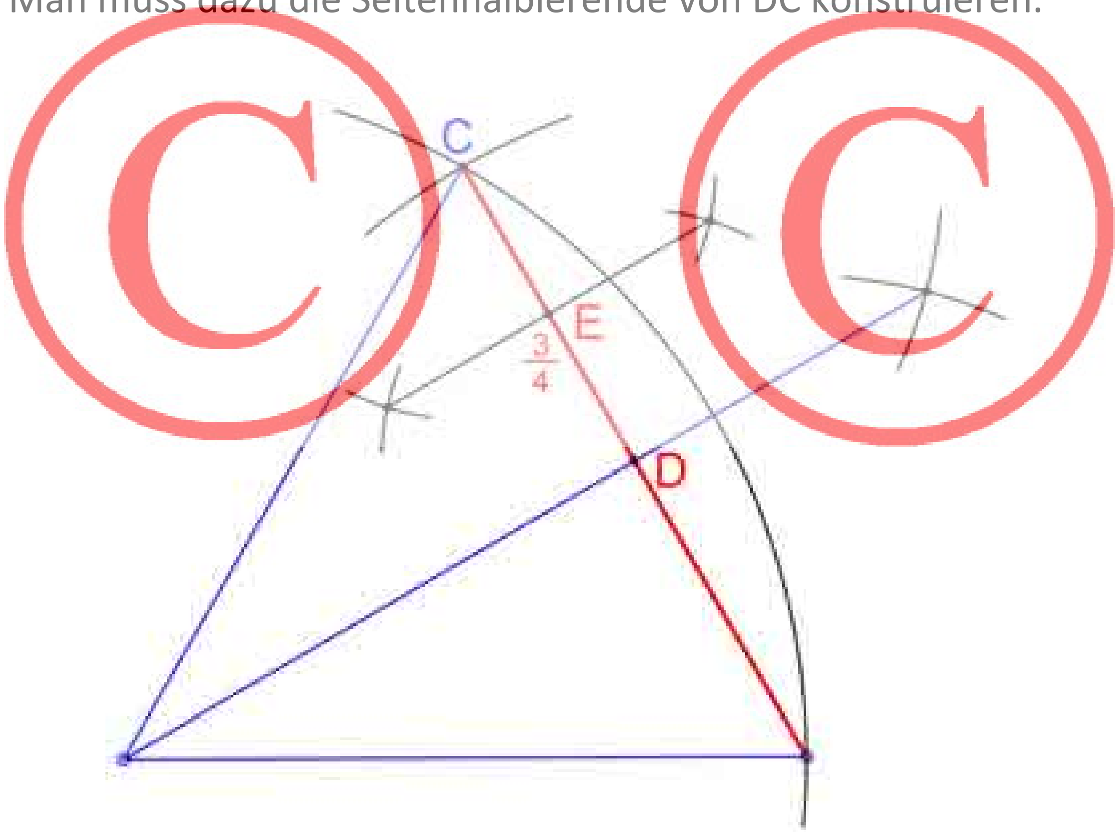
1. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC.
   Markiere die Seite $\overline{BC}$ rot.



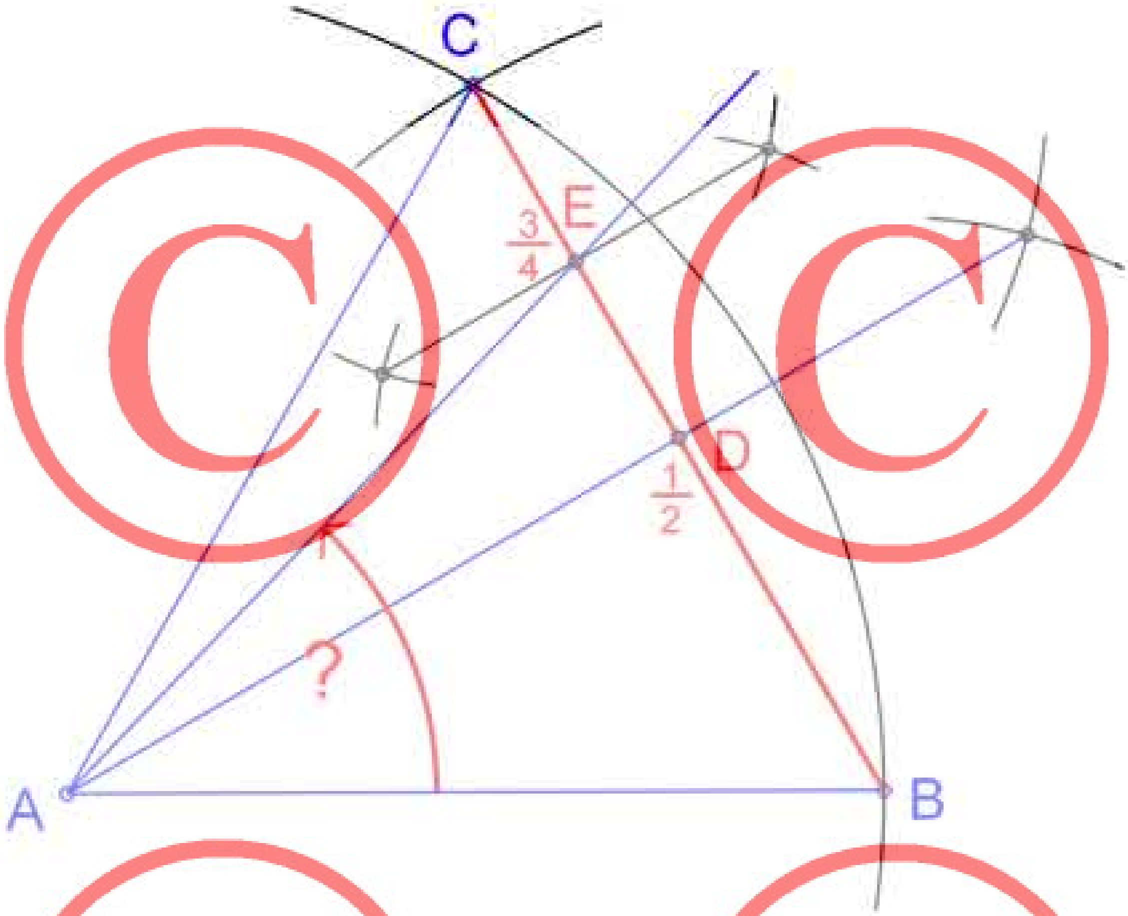
2. Halbiere die Strecke $\overline{BC}$.
   Man kann dazu die Winkelhalbierende konstruieren.



3. Halbiere nun die Strecke $\overline{DC}$ um den Punkt E bei ¾ zu erhalten.
   Man muss dazu die Seitenhalbierende von $\overline{DC}$ konstruieren.



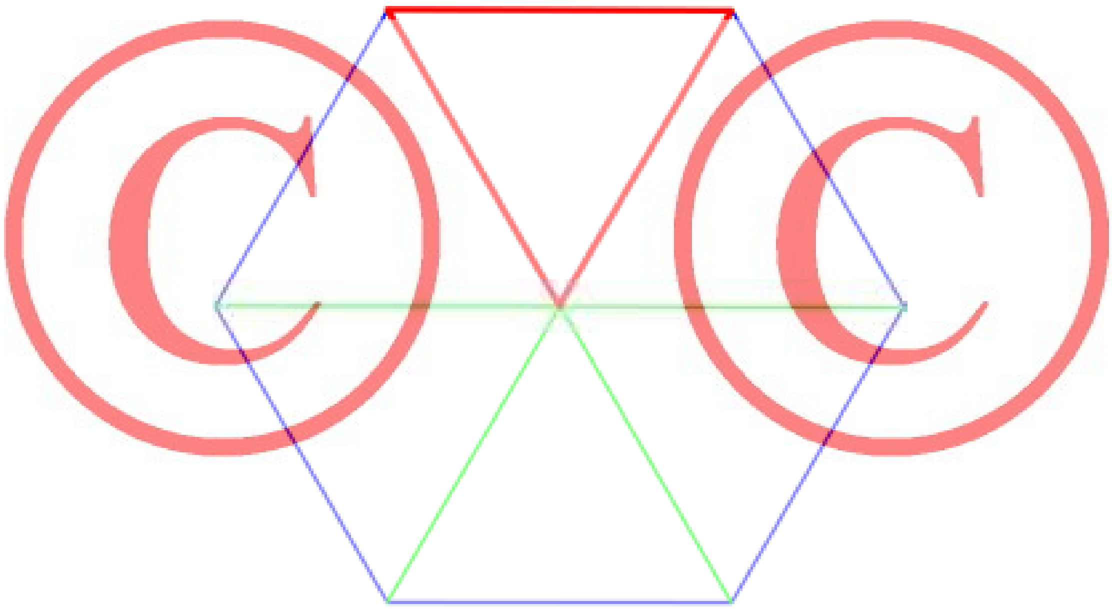
4. Zeichne nun den Schenkel $\overline{AE}$.
   Nach der sumerischen Methode müsste das ein Winkel von 45° sein. Miss mit dem Geodreieck nach. Was stellst du fest?



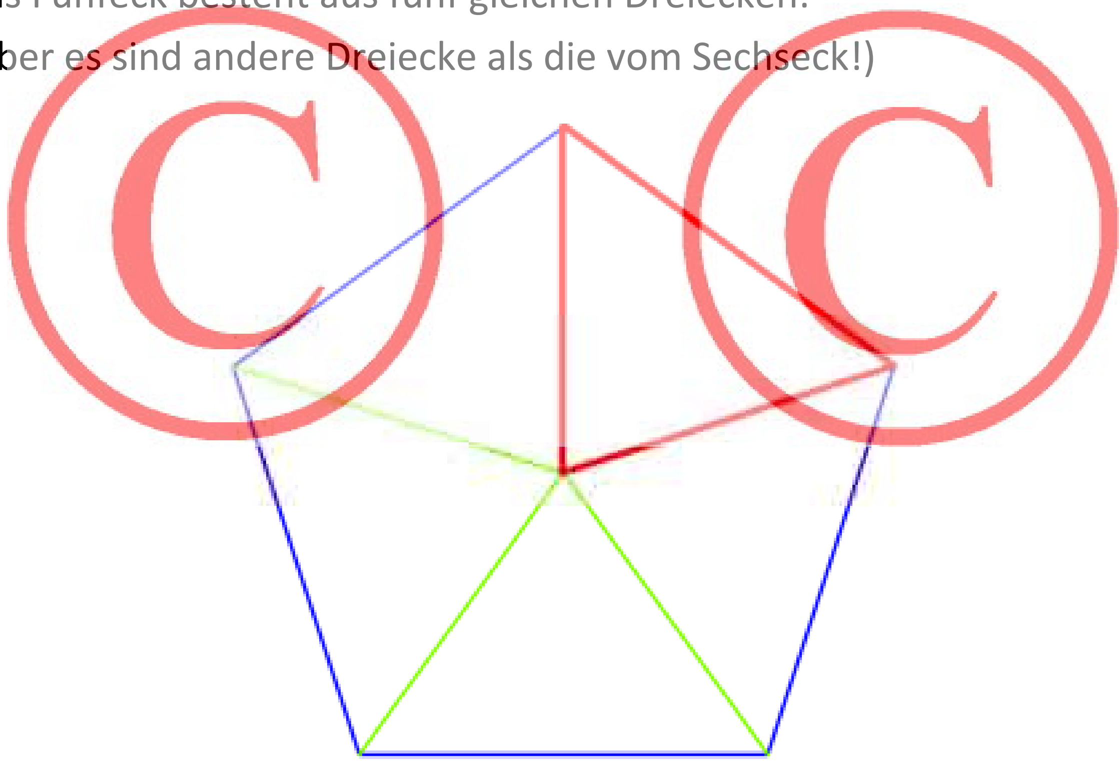
→ ***Versuche die Abweichung zu erklären.***

Dreiecke in Polygonen

Polygone lassen sich aus Dreiecken zusammensetzen.
Das Sechseck zum Beispiel besteht aus sechs gleichen (kongruenten) Dreiecken:

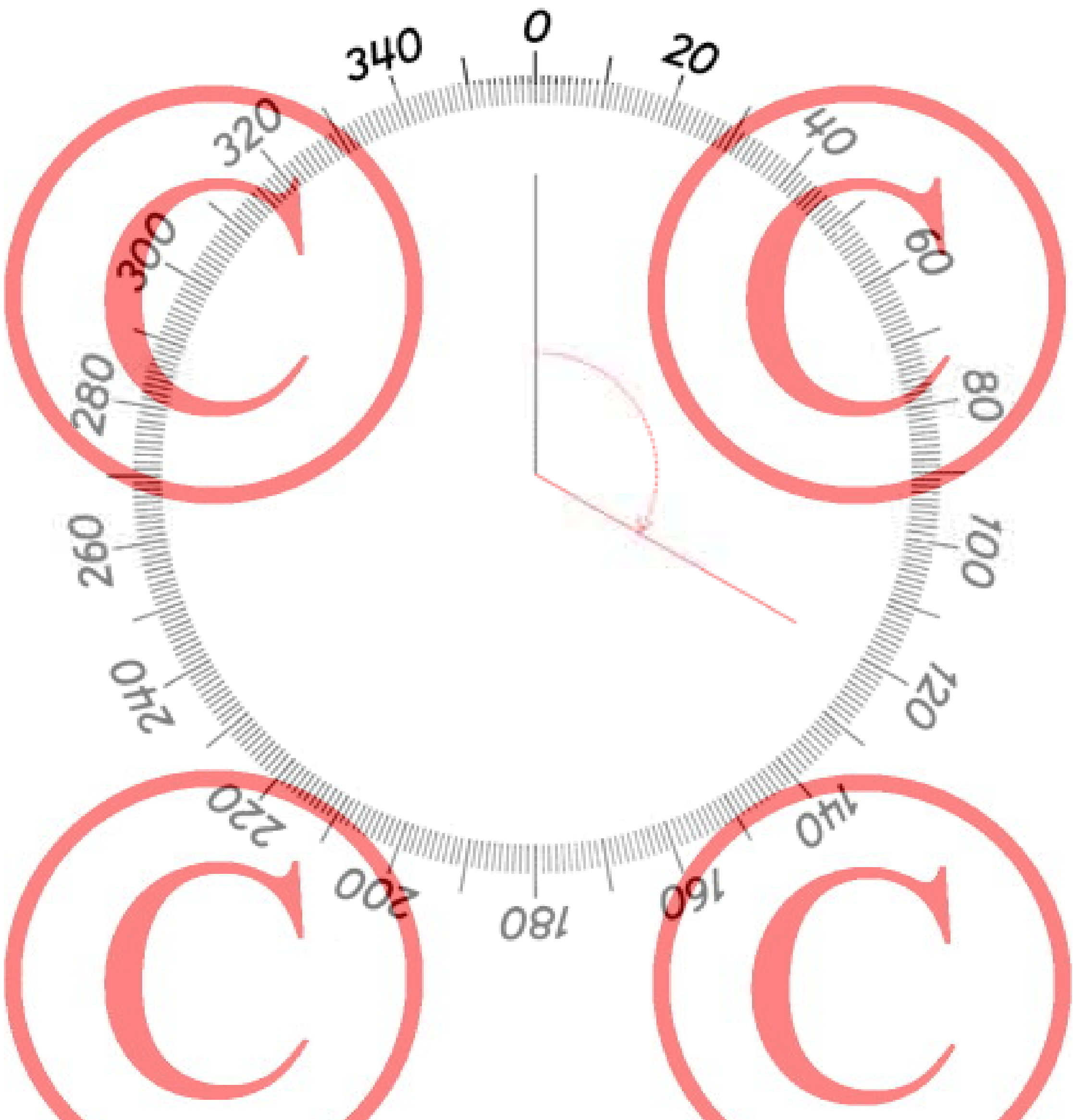


Das Fünfeck besteht aus fünf gleichen Dreiecken:
(Aber es sind andere Dreiecke als die vom Sechseck!)



Die Winkel im Zentrum

Ein voller Kreis misst 360°.

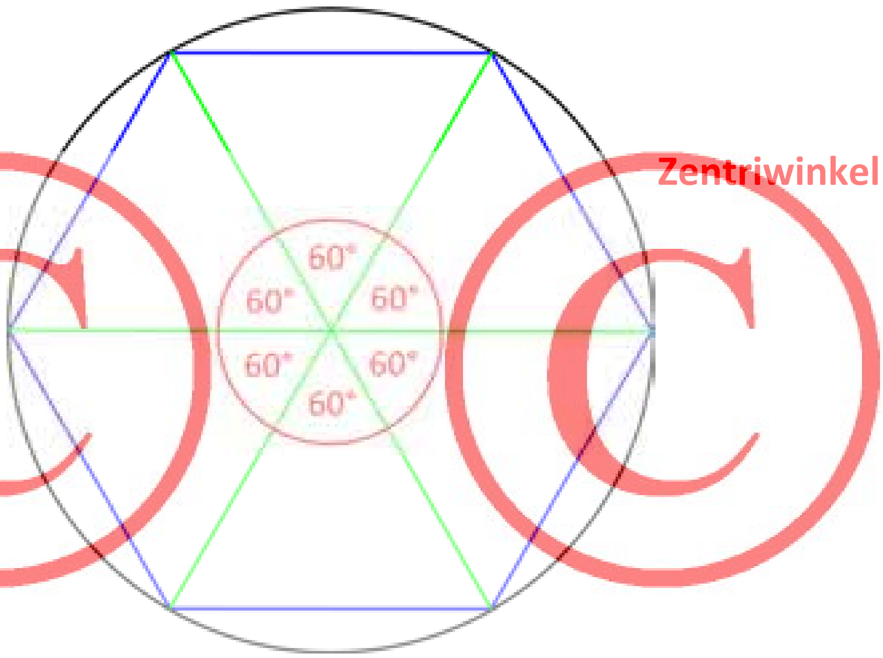


So kann man ausrechnen, wie viel Grad der Zentrums-Winkel (Zentriwinkel) eines einzelnen Dreiecks im Polygon misst:

$$\text{Zentriwinkel} = \frac{360°}{\text{Anzahl der Ecken}}$$

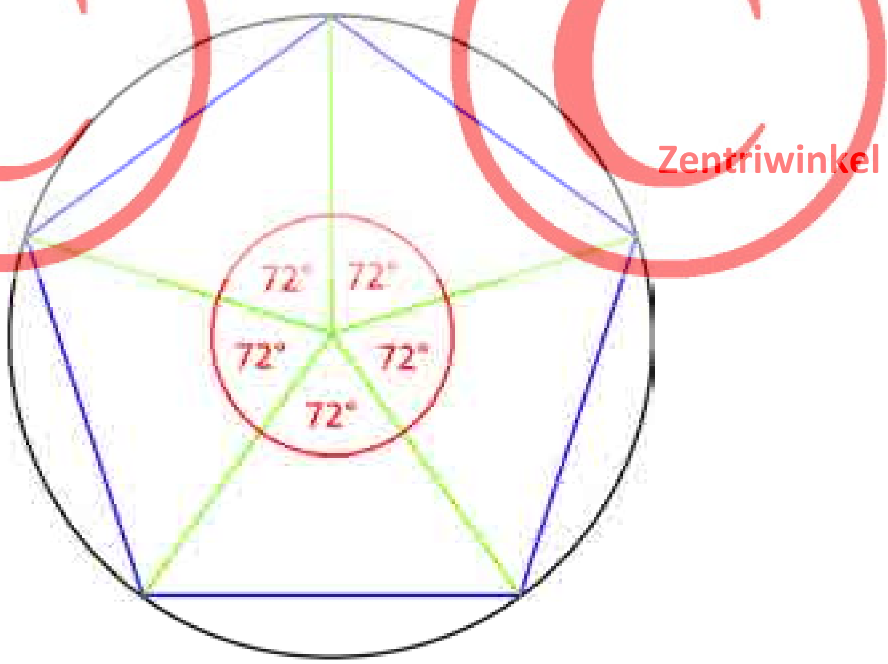
Beim Sechseck mit sechs Dreiecken teilen sich die 360° auf sechs Winkel auf:

$$360° : 6 = 60°$$



Beim Fünfeck mit fünf Dreiecken teilen sich die 360° auf fünf Winkel auf:

$$360° : 5 = 72°$$

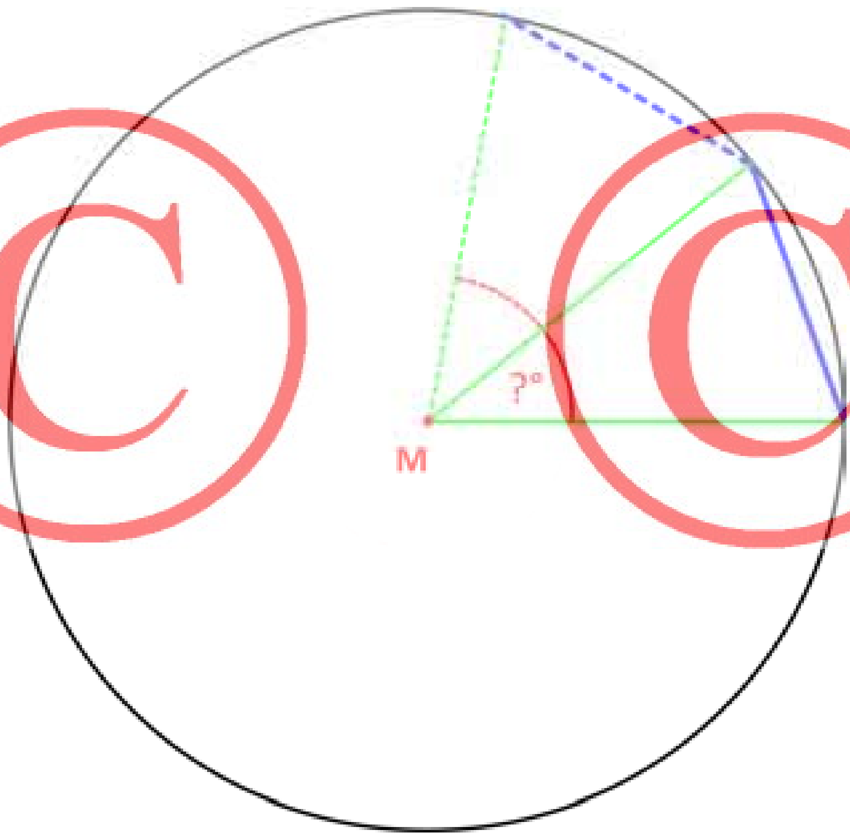


Konstruktion mit Hilfe des Zentriwinkels

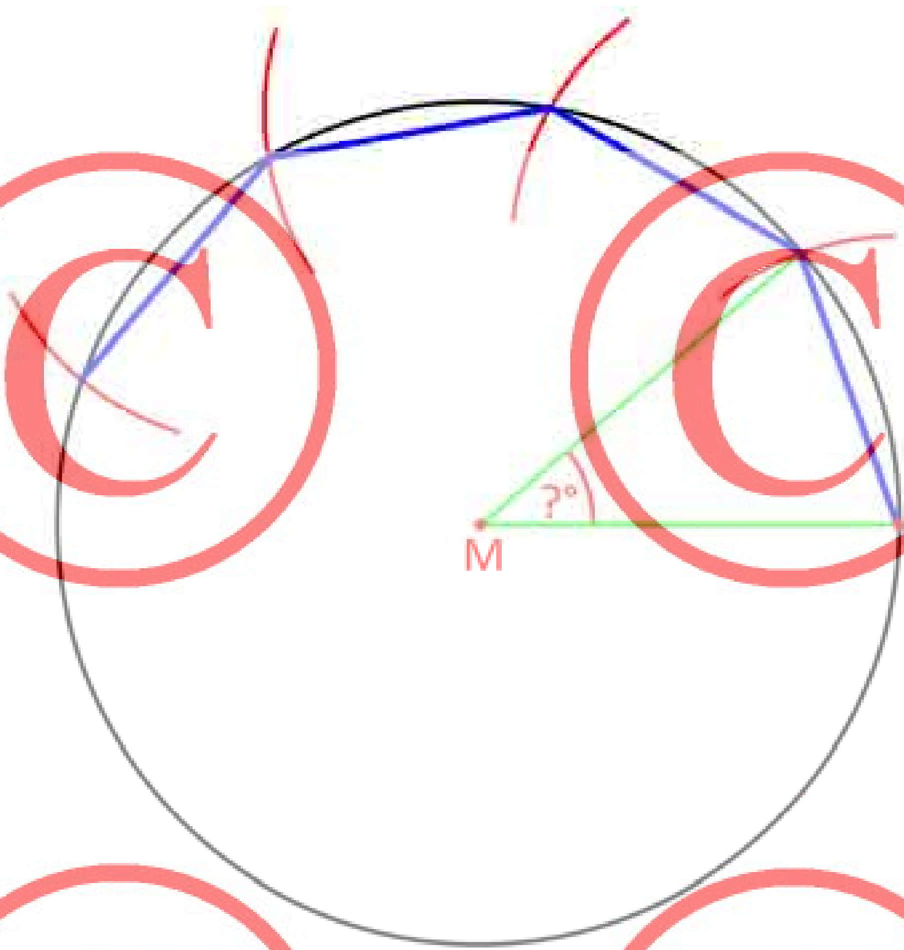
Auf diese Weise kann man ein beliebiges Polygon konstruieren:

- Berechne den Zentriwinkel für dein Polygon.
- Zeichne einen Kreis.
- Zeichne einen Halbmesser (Radius).
- Zeichne an diese Linie deinen errechneten Winkel.
- Zeichne die erste Außenseite des Polygons.
- So kann man nun fortfahren und die nächsten Zentriwinkel und Außenlinien des Polygons zeichnen.

→ ***Probiere diese Methode aus, z. B. für ein Neuneck.***



Etwas schneller und eleganter geht es, wenn man nach der ersten Außenlinie die Länge dieser Strecke mit dem Zirkel abnimmt und diese Strecke mehrmals auf der Außenlinie abträgt.

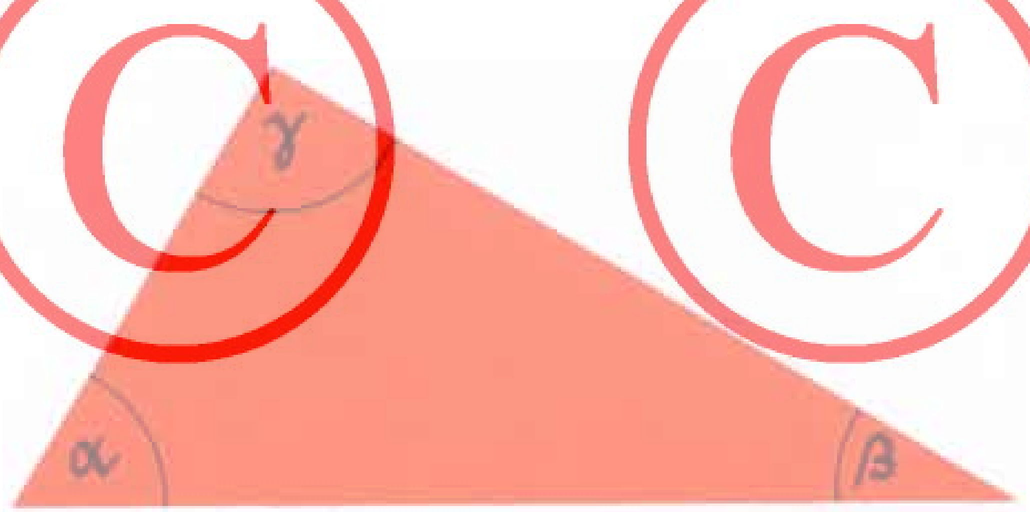


Diese Methode mit Hilfe der Zentriwinkel eignet sich besonders dann, wenn wir von vornherein festlegen wollen, wie groß ***das gesamte Polygon*** werden soll. Der Ausgangskreis bestimmt die Größe.

Die Winkelsumme im Dreieck

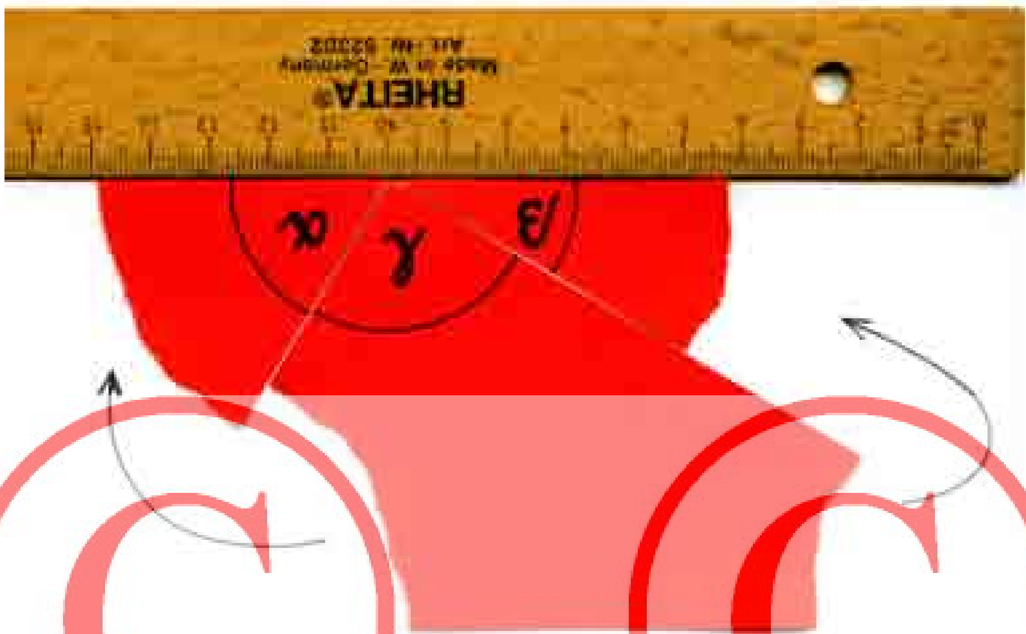
Bevor wir uns mit der zweiten Konstruktions-Methode für ein Polygon beschäftigen, machen wir einen kleinen „Abstecher“. Dreiecke haben eine erstaunliche Eigenschaft:

- Schneide aus buntem Papier ein beliebiges Dreieck und bezeichne die Winkel mit α, β und γ (Alpha, Beta und Gamma).



- Reiße dann die beiden unten liegenden Ecken ab. Lege die beiden abgerissenen Ecken an die obere Ecke an.

→ ***Was stellst du fest?***



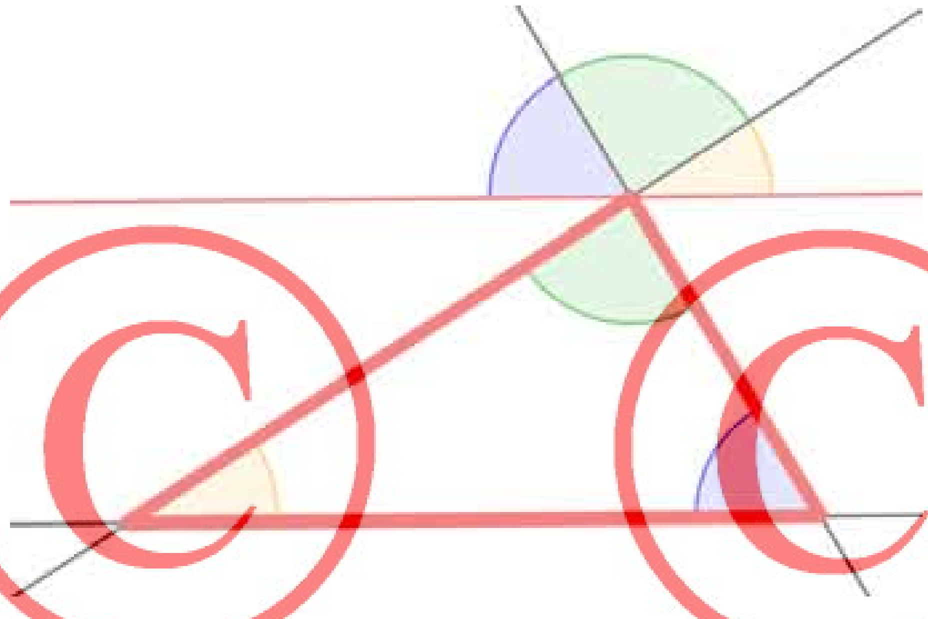
Alle drei Winkel zusammen ergeben eine gerade Kante (siehe Lineal). Sie bilden zusammen einen gestreckten Winkel von 180°.

→ ***Probiere es mit ganz verschiedenen Dreiecken aus:***
Ist das immer so?

Lehrsatz:

»Die Summe der Winkel in einem Dreieck ist 180°.
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$«

Beweis:



→ ***Versuche, diese Zeichnung zu erklären!***

Es gilt: $\alpha + \beta + \gamma = \mathbf{180°}$

Wenn wir einen Winkel (γ) eines Dreiecks kennen, wissen wir auch, wie groß die beiden anderen Winkel zusammen sind.

$$\alpha + \beta = \mathbf{180°} - \gamma$$

Weil die Dreiecke in den Polygonen gleichschenklig sind, kann man auch sagen:

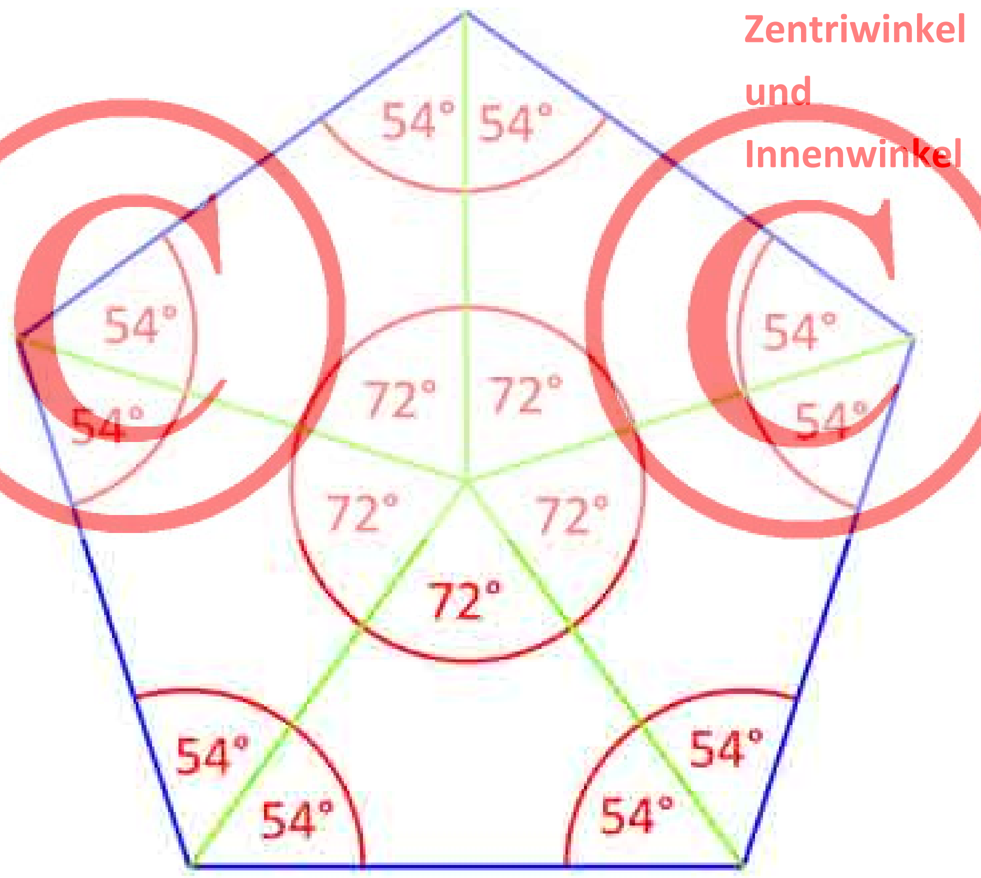
$$\alpha + \alpha = \mathbf{180°} - \gamma$$

Für das Fünfeck zum Beispiel gilt deshalb:

$$\alpha + \alpha = \mathbf{180°} - \mathbf{72°}$$

$$\alpha + \alpha = \mathbf{108°}$$

$$\alpha = \mathbf{54°}$$



Konstruktion mit Hilfe des Innenwinkels

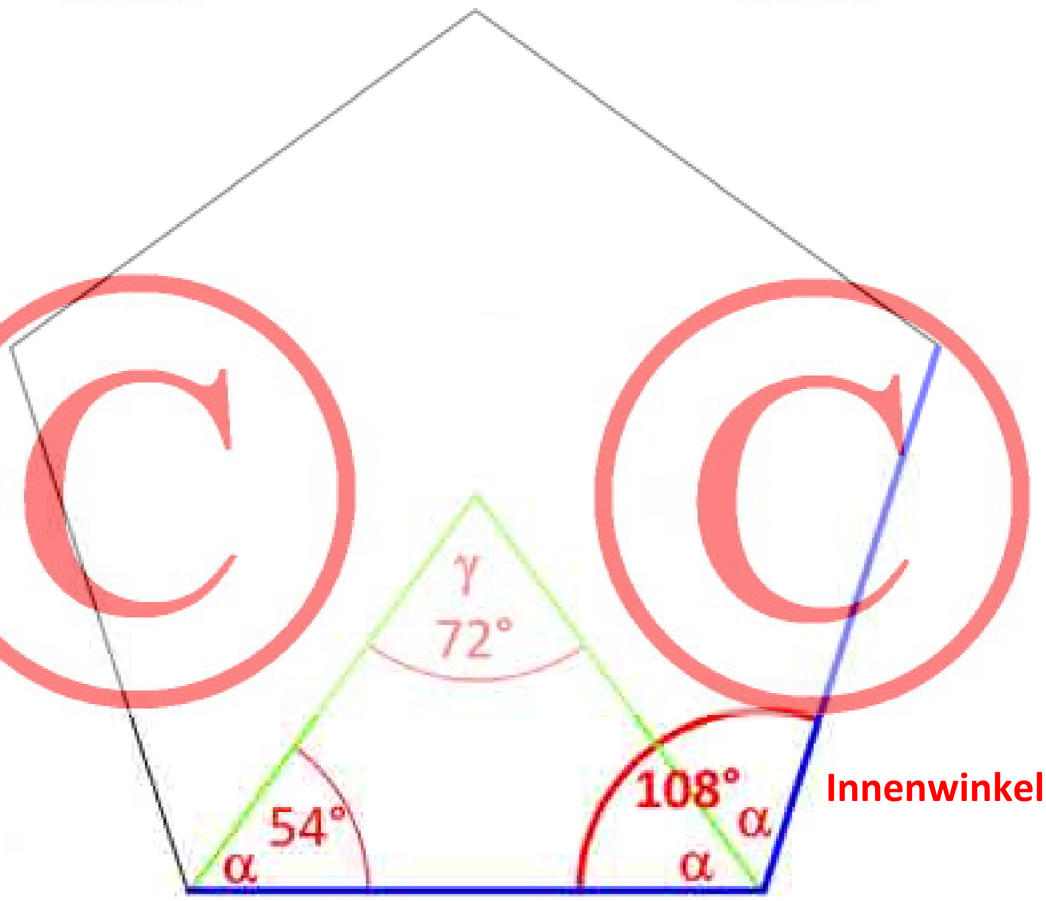
Jetzt können wir das Polygon auch anhand der ***Innenwinkel*** konstruieren. Denn wir wissen:

Der Innenwinkel ist $\alpha + \alpha$

$$\text{Innenwinkel} = 180° - \text{Zentriwinkel}$$

Beim Fünfeck war es:

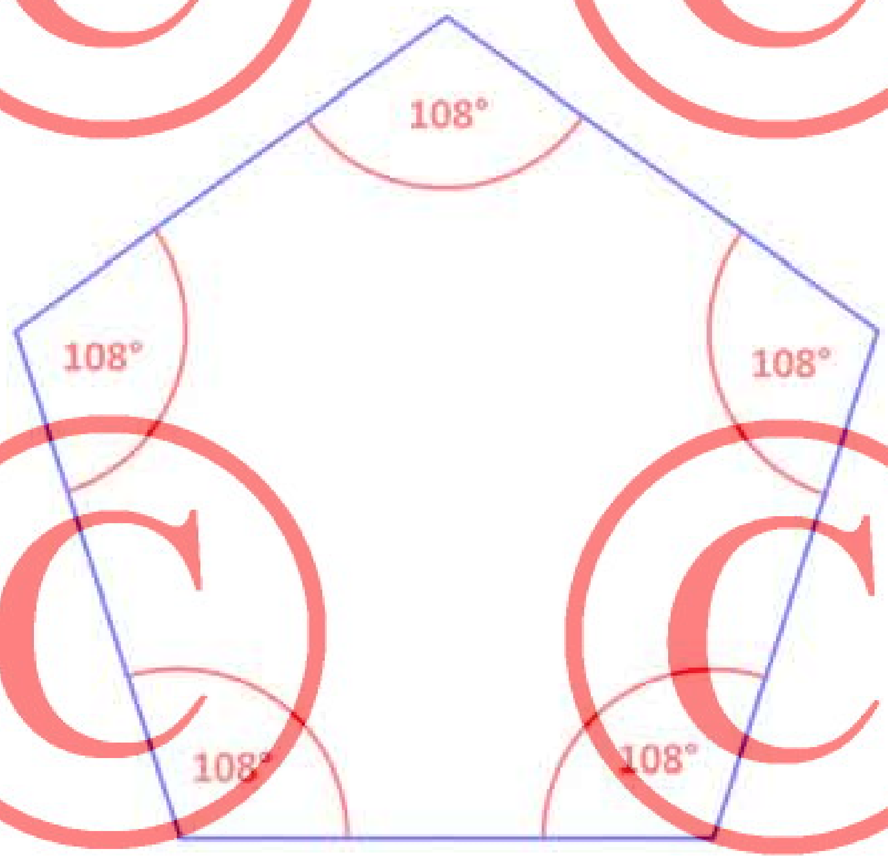
$$\text{Innenwinkel} = 180° - 72° = 108°$$



Bei dieser Konstruktions-Methode geht man folgendermaßen vor:

- Berechne den Innenwinkel für dein Polygon.
- Zeichne eine Seite.
- Zeichne den ersten Winkel.
- Bestimme die Länge der neuen Seite mit dem Zirkel (stellen ihn auf die Länge der ersten Seite ein).
- Wiederhole diese Schritte, bis das Polygon fertig ist.

→ ***Probiere diese Methode aus, z. B. für ein Fünfeck.***

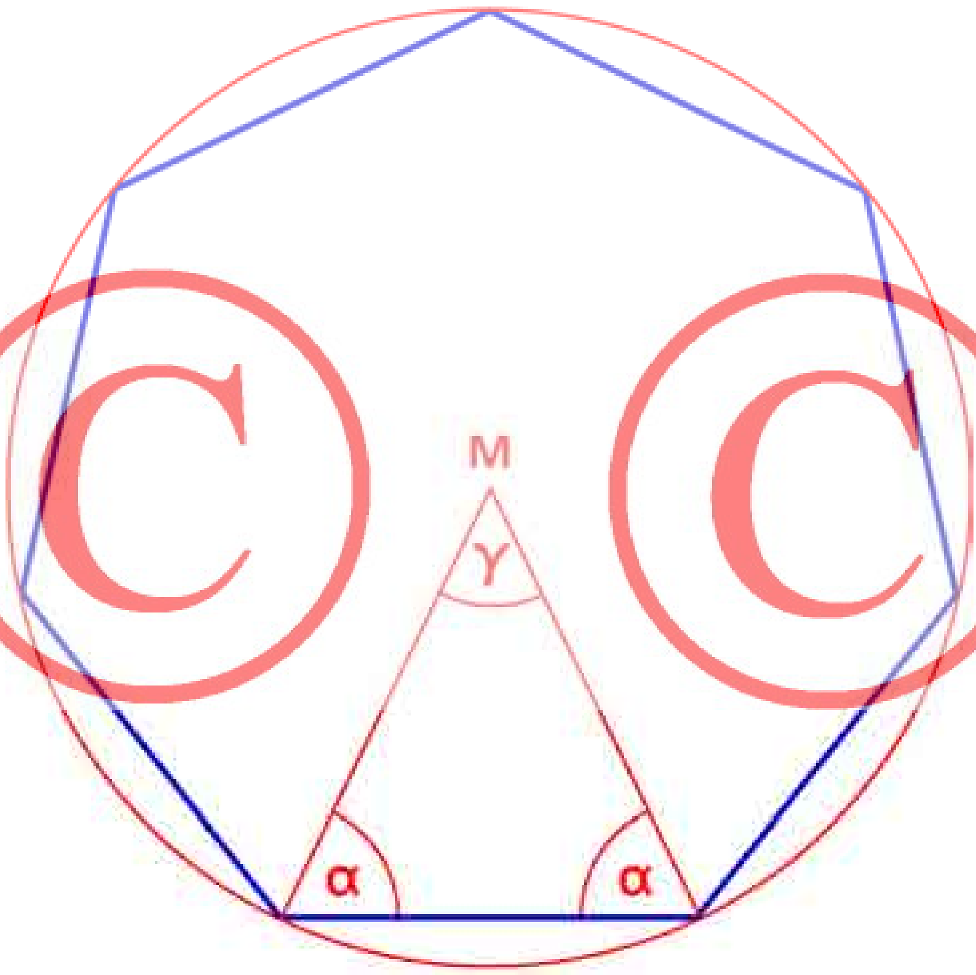


Diese Methode eignet sich besonders dann, wenn wir von vornherein festlegen wollen, wie lang ***eine Seite*** des Polygons werden soll.

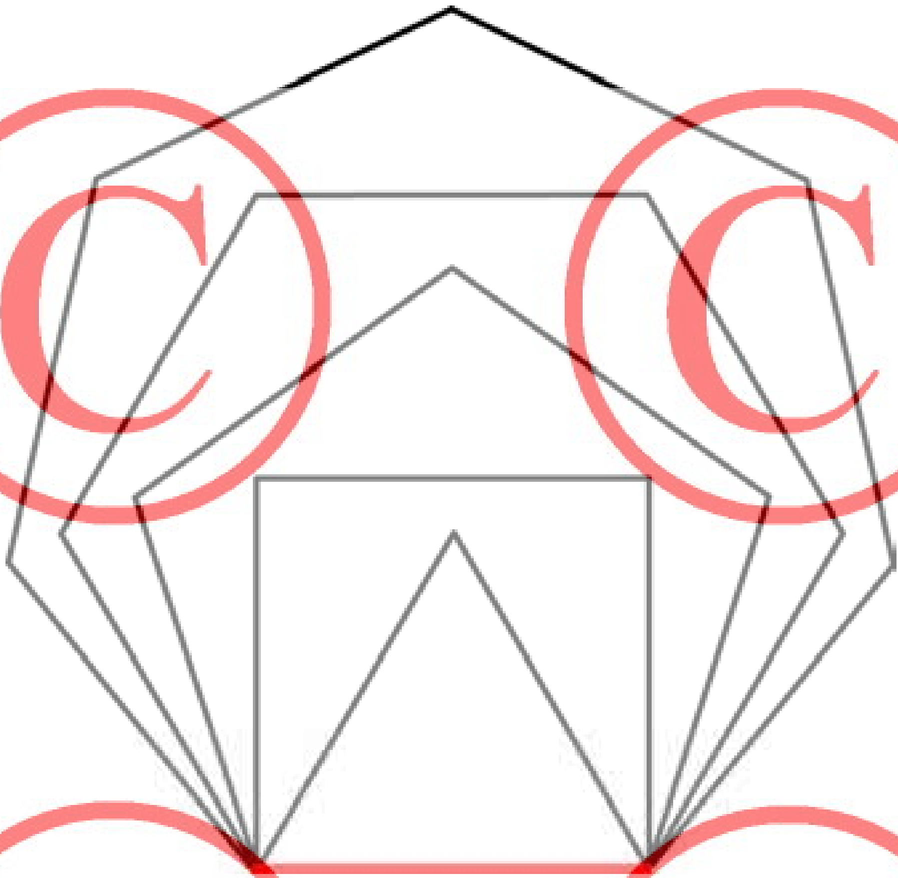
Konstruktion mit kombinierten Methoden

Man kann die verschiedenen Konstruktionsmethoden auch kombinieren. Wie wäre es mit dieser Möglichkeit?

- Zeichne eine Seite.
- Berechne die Winkel eines Dreiecks im Polygon (halber Innenwinkel).
- Zeichne das Dreieck. Die Spitze des Dreiecks bildet den Mittelpunkt des Umkreises.
- Zeichne den Umkreis und schlage die Seitenlänge mit dem Zirkel auf der Kreislinie ab.



Das Titelbild dieses Buches lässt sich mit der Methode „Innenwinkel“ oder mit der kombinierten Methode von „Zentriwinkel“ und „Innenwinkel“ konstruieren.

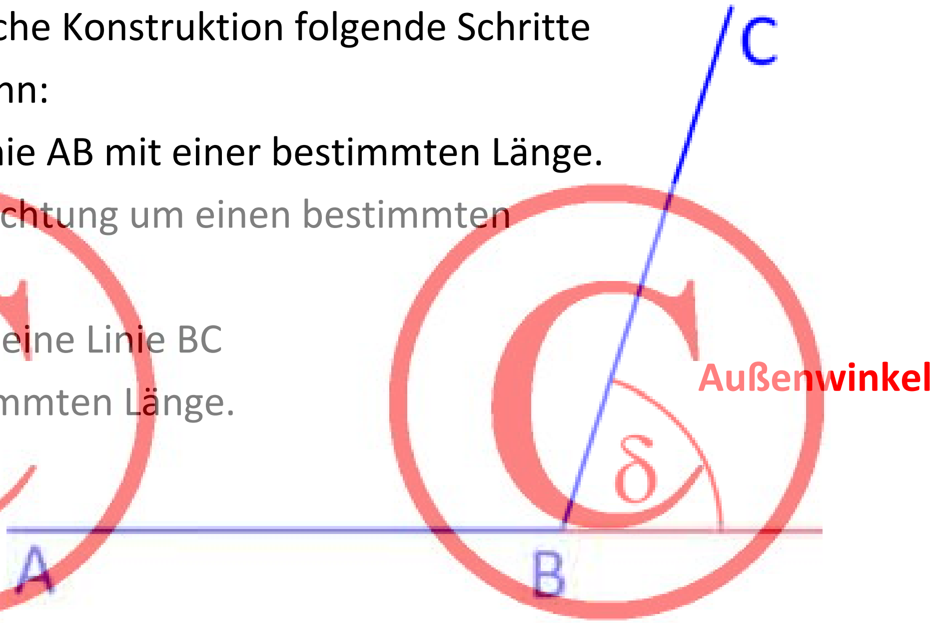


→ ***Konstruiere diese Figur. Wähle eine Ausgangsseite mit 7 cm.***

Die Außenwinkel

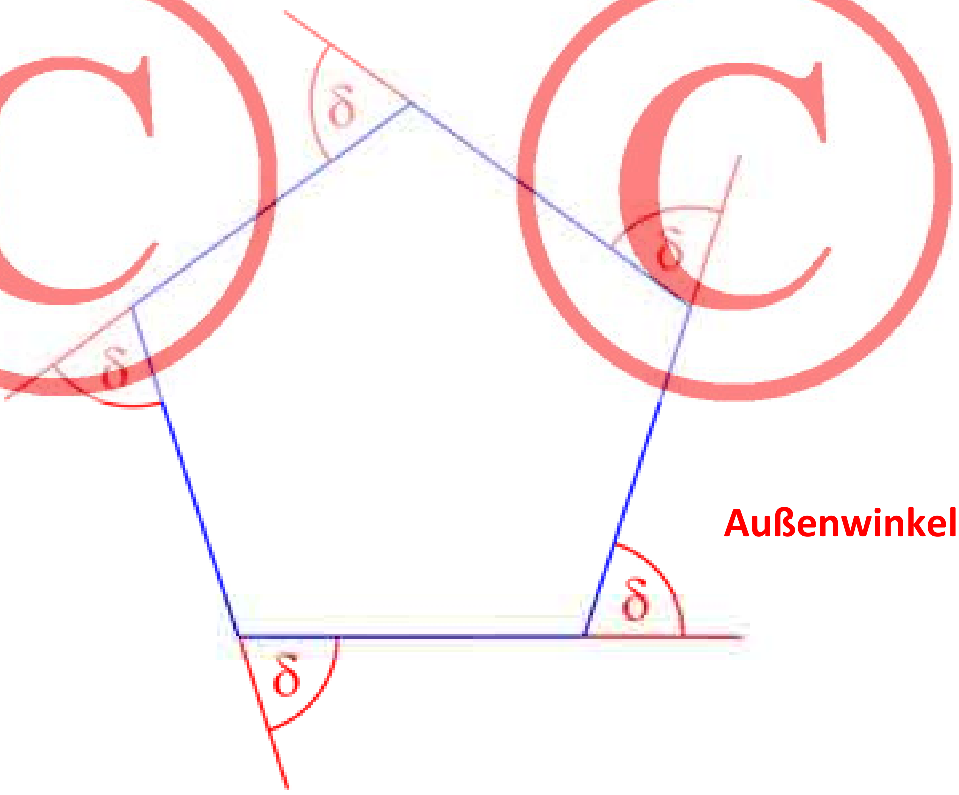
Stelle dir ein Computerprogramm vor, mit dem man für eine geometrische Konstruktion folgende Schritte programmieren kann:

1. Ziehe eine Linie AB mit einer bestimmten Länge.
2. Ändere die Richtung um einen bestimmten Winkel.
3. Ziehe wieder eine Linie BC mit der bestimmten Länge.



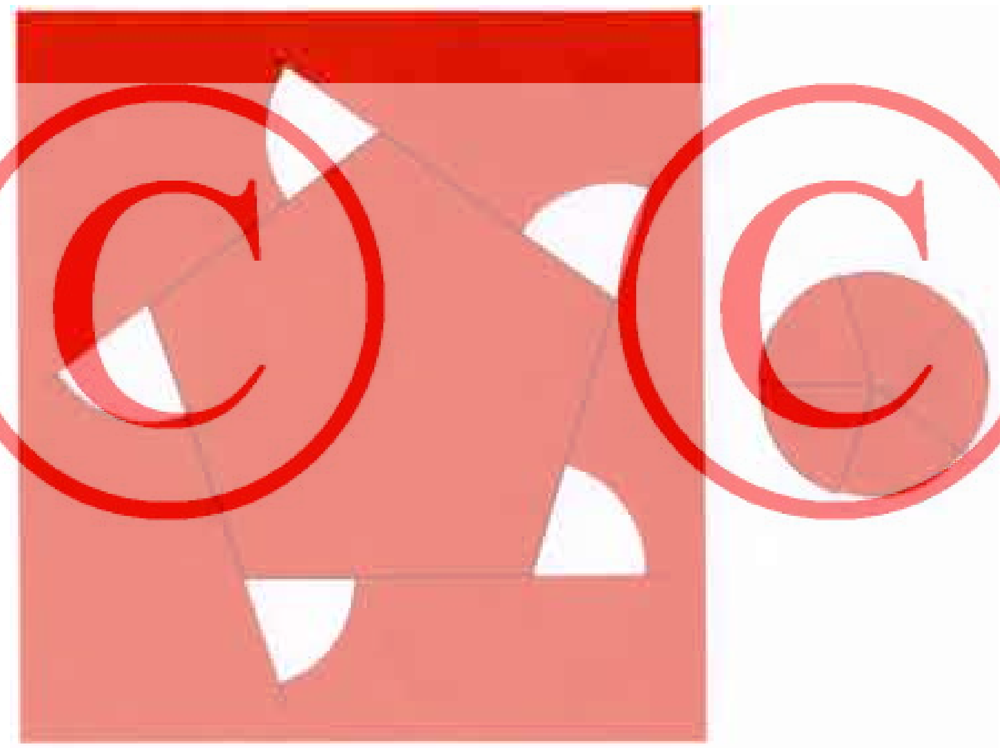
Das kann man nun fortsetzen:

4. Ändere wieder die Richtung um den bestimmten Winkel.
5. Ziehe wieder eine Linie CD mit der bestimmten Länge.
6. …



Wie groß ist der Außenwinkel?

- Zeichne ein Fünfeck mit Außenwinkeln.
- Schneide die Außenwinkel aus und lege sie zusammen.



Die Kreissegmente ergeben zusammen genau einen vollen Kreis.
Alle fünf Winkel haben zusammen 360°.

Beim Fünfeck misst demnach ein Winkel ein Fünftel von 360°.

$$360° : 5 = 72°$$

→ ***Probiere es bei ganz verschiedenen Polygonen aus.***
Ist das immer so?

Lehrsatz:

»Bei einem Polygon ist die Summe der Außenwinkel 360°.«

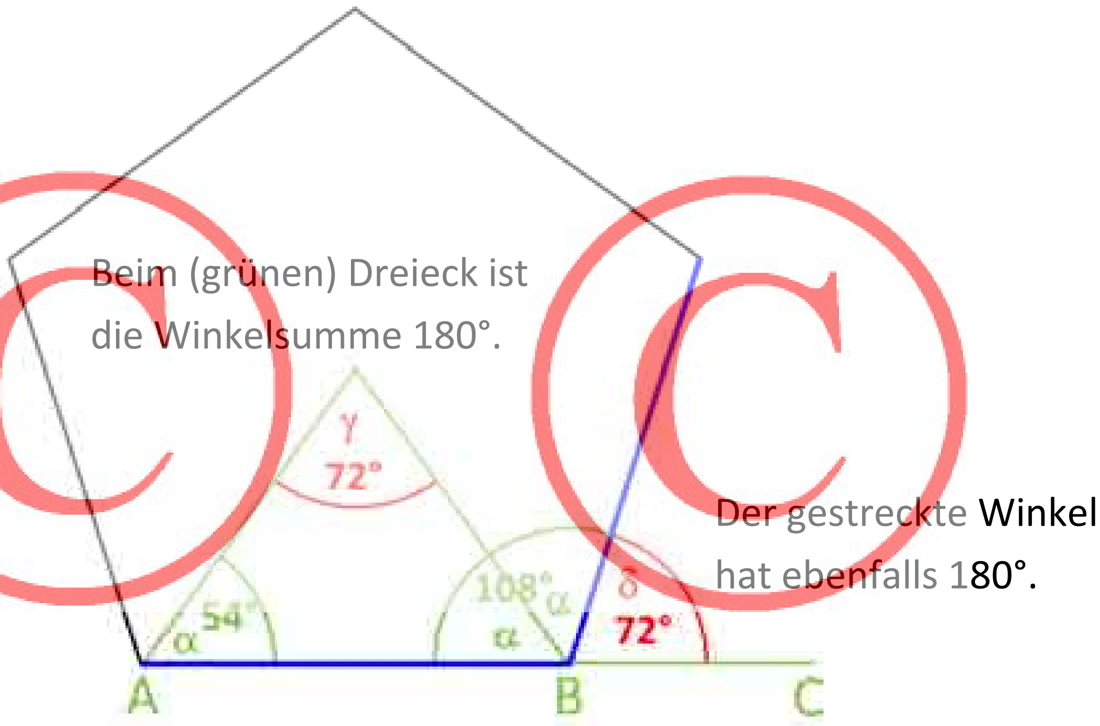
Beweis:

Betrachten wir die blaue Ecke des Fünfecks: Eine blaue Linie bildet zusammen mit der grünen Verlängerung einen gestreckten Winkel von 180°.

Die blaue Ecke setzt sich aus zwei Winkel α zusammen.

Somit ist der Außenwinkel (hier „Delta“ genannt):

$$\delta = 180° - 2\alpha$$



Lehrsatz:

»Der Außenwinkel δ ist gleich dem Zentriwinkel γ.«

Deshalb gilt für den Außenwinkel dasselbe wie für den Zentriwinkel:

$$\text{Außenwinkel} = \frac{360°}{\text{Anzahl der Ecken}}$$

Formeln für das regelmäßige Polygon

Wir haben gesehen, wie man für alle möglichen Polygone die Winkel (Zentriwinkel, Innenwinkel und Außenwinkel) ausrechnen kann. Mathematiker drücken dies in Formeln aus, die ganz allgemein gelten.

n ist die Anzahl der Ecken des Polygons

Zentriwinkel und Außenwinkel:

$$\frac{360°}{n}$$

Innenwinkel:

$$\frac{(n-2)}{n} \cdot 180°$$

Winkelsumme der Innenwinkel:

$$(n-2) \cdot 180°$$

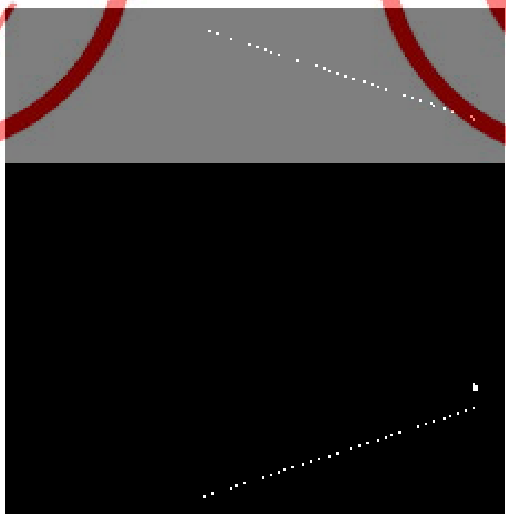
→ ***Verwende diese Formeln und berechne einige Polygone. Stimmen die Rechenergebnisse mit deinen Messungen überein?***

Programmieren am PC mit „Logo“

„Logo“ ist eine Programmiersprache, mit der man geometrische Formen am Computer programmieren kann.
Das Programm wurde in den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts in den USA entwickelt.
Wie auf Seite 12 beschrieben, kann man zum Beispiel ein Fünfeck unter Angabe der Linienlängen und der Winkelrichtungen (Außenwinkel) konstruieren. Das gesamte Programm für ein Fünfeck sieht dann folgendermaßen aus:

Befehl	**Erklärung**
forward 100	Zeichne vorwärts eine Linie mit 100 Längeneinheiten.
left 72	Drehe dich um 72° nach links.
forward 100	Zeichne vorwärts eine Linie mit 100 Längeneinheiten.
left 72	Drehe dich um 72° nach links.
forward 100	Zeichne vorwärts eine Linie mit 100 Längeneinheiten.
left 72	Drehe dich um 72° nach links.
forward 100	Zeichne vorwärts eine Linie mit 100 Längeneinheiten.
left 72	Drehe dich um 72° nach links.
forward 100	Zeichne vorwärts eine Linie mit 100 Längeneinheiten.

So sieht das Ergebnis am Bildschirm aus:



LOGO-Befehle

Hier eine Auswahl der wichtigsten Funktionen:

Befehl	Kurzform	Beschreibung
forward *Länge*	fd *Länge*	Die Schildkröte bewegt sich um eine bestimmte Anzahl von Einheiten nach vorne.
back *Länge*	bk *Länge*	Die Schildkröte bewegt sich um eine bestimmte Anzahl von Einheiten zurück.
right *Winkel*	rt *Winkel*	Die Schildkröte dreht sich um einen bestimmten Winkel nach rechts.
left *Winkel*	lt *Winkel*	Die Schildkröte dreht sich um einen bestimmten Winkel nach links.
home		Die Schildkröte bewegt sich zur Mitte des Bildschirms mit Ausrichtung nach oben.
cleanscreen	cs	Alles wird gelöscht – Ausgangszustand.

LOGO ist Freeware und kann im Internet heruntergeladen werden:
http://http.cs.berkeley.edu/~bh/

Viel Spaß am Programmieren!

→ ***Schaffst du die Figur von Seite 15 (oder die ganze Figur vom Buchtitel) mit Logo?***