Geometrie der Polygone

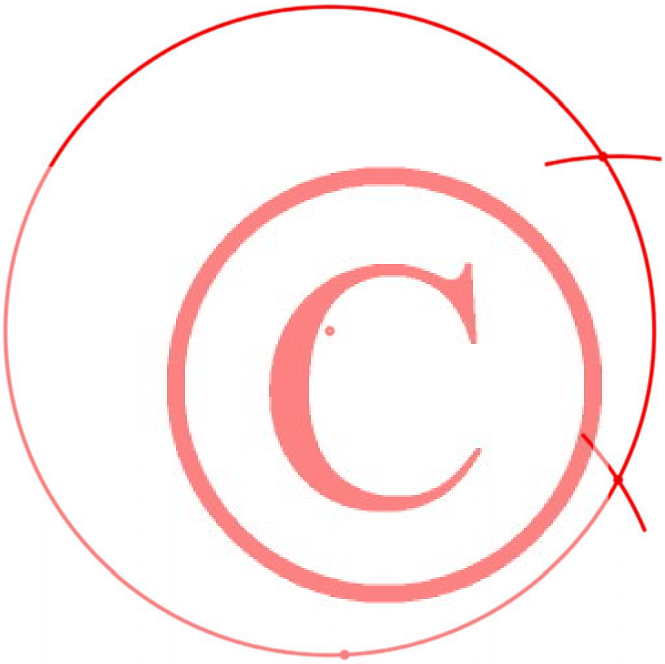
Teil 6

Klassische Konstruktionen

Sechseck

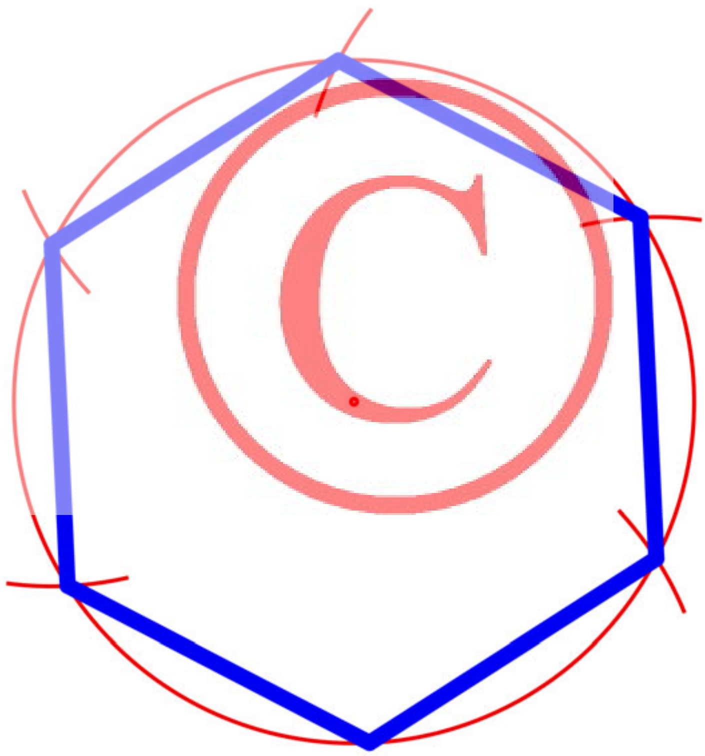
Gegeben ist der Umkreis des Sechsecks

- Zeichne einen Kreis mit dem gewünschten Radius für den Umkreis des Sechsecks.



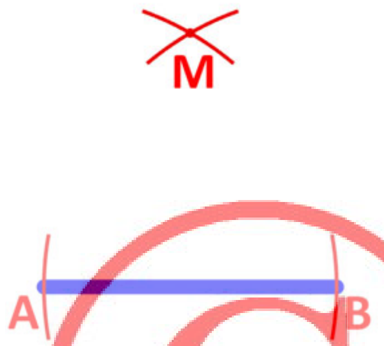
- Trage den Radius sechs Mal auf dem Umkreis ab.
  Mit dem letzten Radius kommt man wieder genau am Ausgangspunkt an!

- Verbinde die sechs Schnittpunkte auf der Kreislinie.



Gegeben ist eine Seite des Sechsecks

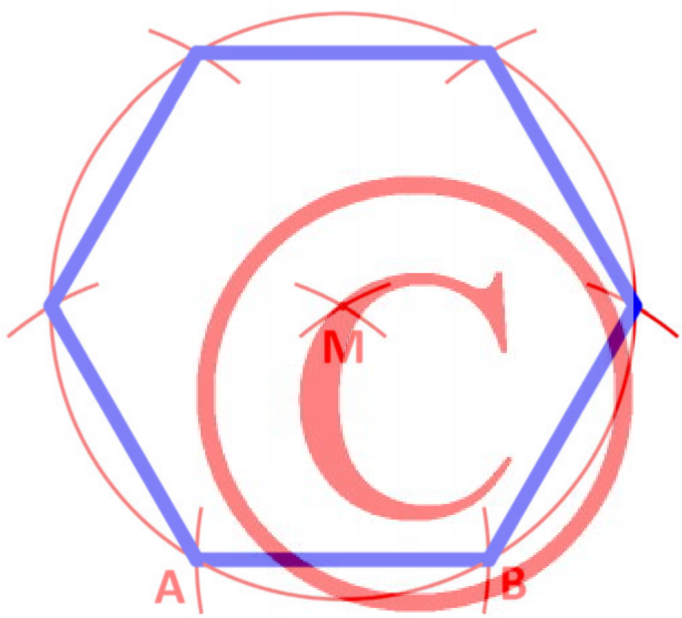
- Zeichne die gewünschte Strecke $\overline{AB}$ für das Sechseck.



- Konstruiere dazu den Punkt M wie bei einem gleichseitigen Dreieck. (Siehe die Konstruktion zum Dreieck auf Seite 5.)

- Ziehe einen Kreis um M durch die Punkte A und B.

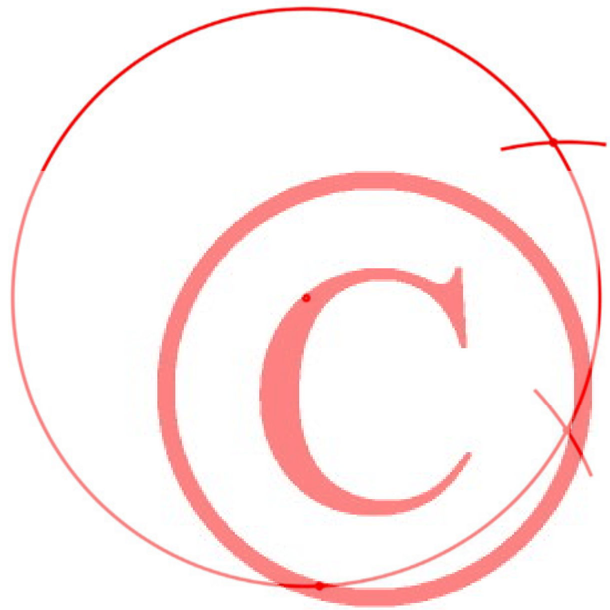
- Trage diesen Radius noch vier Mal auf der Kreislinie ab und verbinde die Schnittpunkte.



Dreieck

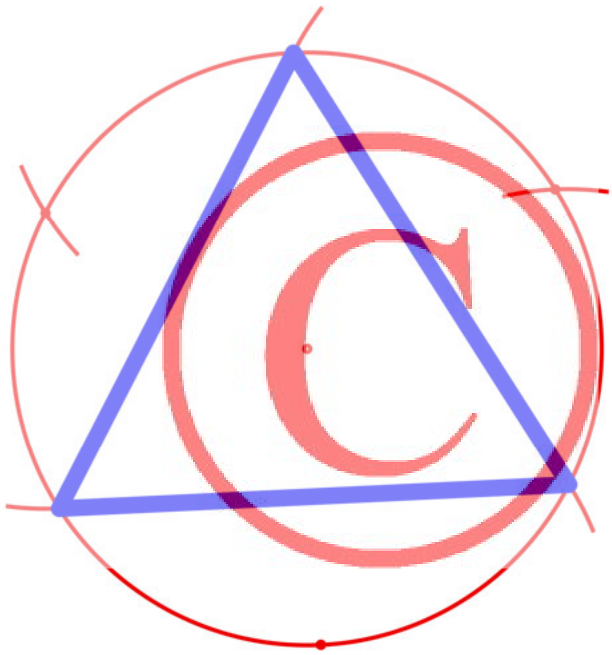
Gegeben ist der Umkreis des Dreiecks

- Zeichne einen Kreis mit dem gewünschten Radius für den Umkreis des Dreiecks.



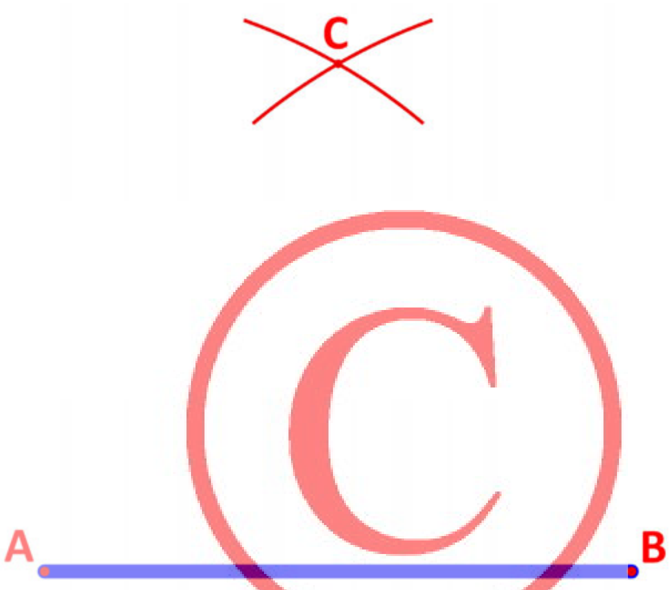
- Trage den Radius sechs Mal auf dem Umkreis ab.

- Verbinde jeden zweiten Punkt.



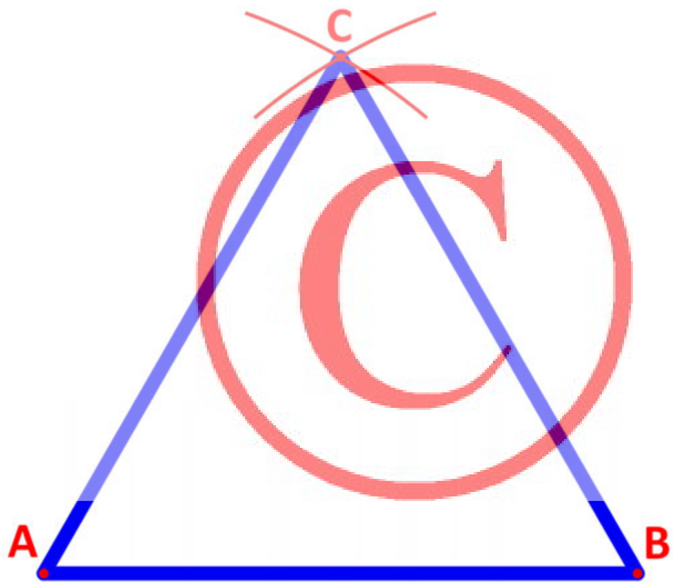
Gegeben ist eine Seite des Dreiecks

- Zeichne die gewünschte Strecke $\overline{AB}$ für das Dreieck.



- Nimm mit dem Zirkel die Länge AB ab und ziehe mit diesem Radius jeweils einen Kreisbogen um A und B.
  Der Schnittpunkt ist C.

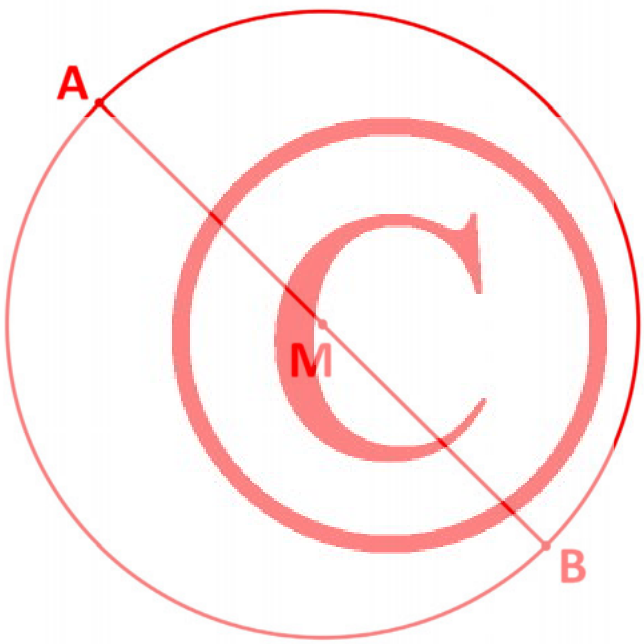
- Verbinde die Punkte A, B und C zum Dreieck.



Viereck

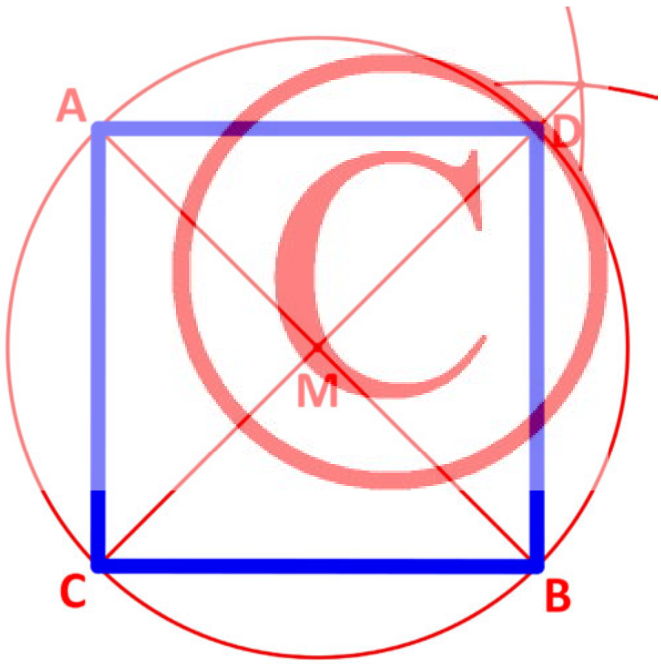
Gegeben ist der Umkreis des Vierecks

- Zeichne einen Kreis mit dem gewünschten Radius für den Umkreis des Quadrats.



- Zeichne eine Linie durch den Mittelpunkt.
  Diese Linie bildet eine Diagonale des Quadrats.

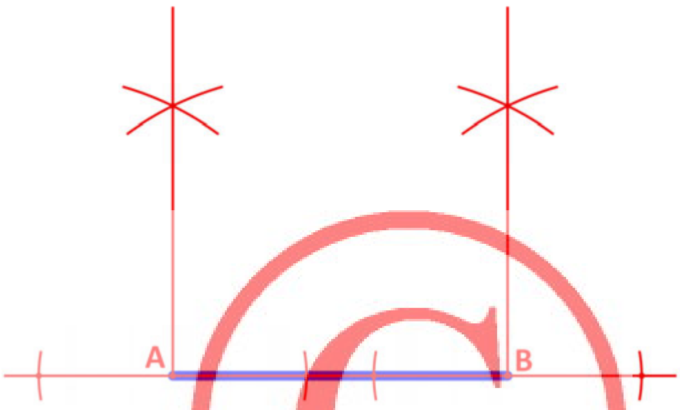
- Konstruiere die Mittelsenkrechte zur Linie $\overline{AB}$. (Je einen Kreis um A und B mit dem gleichen Radius.)



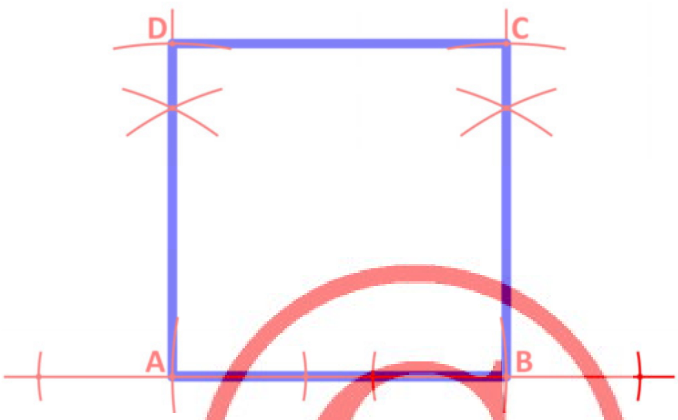
- Verbinde die vier Schnittpunkte A, D, B, C auf der Kreislinie zum Quadrat.

Gegeben ist eine Seite des Vierecks – Möglichkeit 1

- Zeichne die gewünschte Strecke $\overline{AB}$ für das Quadrat.



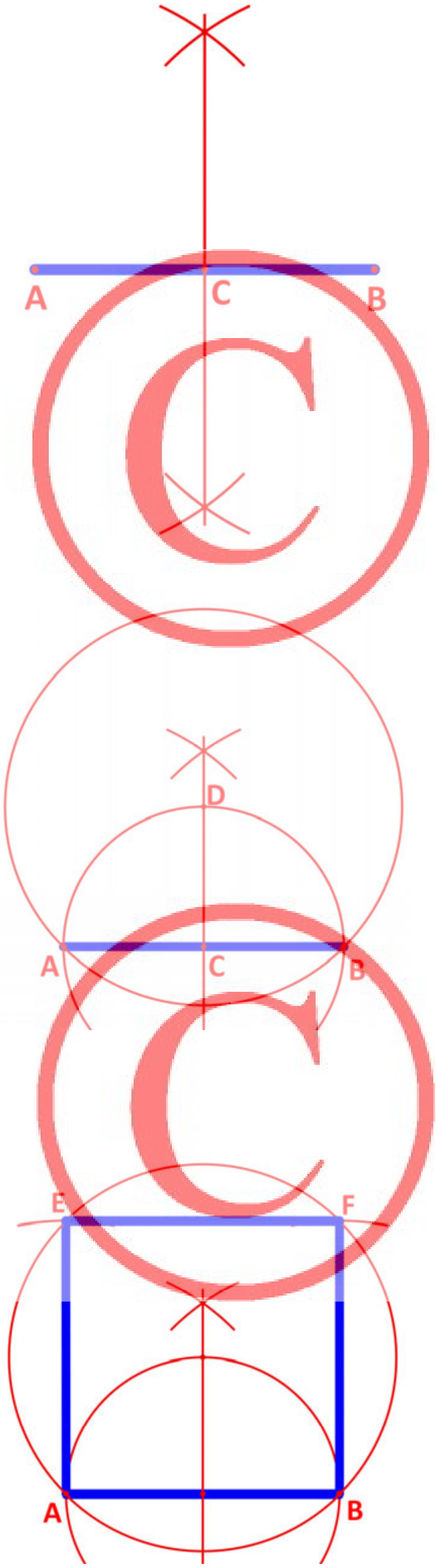
- Verlängere die Strecke nach beiden Seiten.
- Errichte an Punkt A und B eine Senkrechte.
- Ziehe um A und B einen Kreis mit Radius $\overline{AB}$. Die Schnittpunkte auf den Senkrechten ergeben die Punkte D und C.



- Verbinde alle Punkte zum Quadrat.

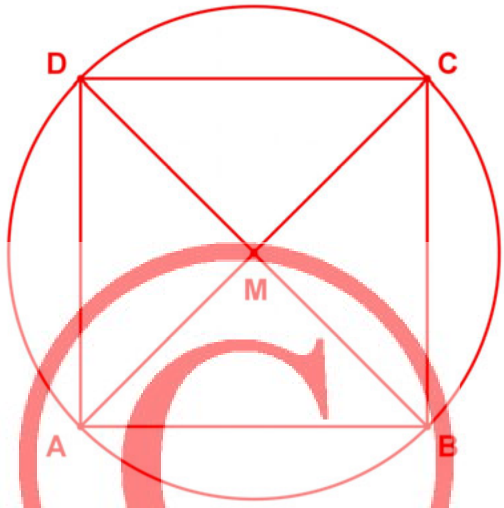
Gegeben ist eine Seite des Vierecks – Möglichkeit 2

- Zeichne die gewünschte Strecke $\overline{AB}$ für das Quadrat.
- Konstruiere die Mittelsenkrechte.
  Dazu ziehst du um A und B einen Kreis mit gleichem Radius.
- Ziehe um C einen Thaleskreis über $\overline{AB}$. (Die Punkte A,B,D bilden ein rechtwinkliges Dreieck.) D ist der Mittelpunkt des Umkreises.
- Ziehe um D einen Kreis durch A und B. Das ist der Umkreis für das Quadrat.
- Ziehe einen Kreis um A mit Radius $\overline{AB}$. Du erhältst den Punkt E.
- Ebenso einen Kreis um B mit Radius $\overline{AB}$. Du erhältst den Punkt F.
- Verbinde die Punkte A, E, F, B zum Quadrat.

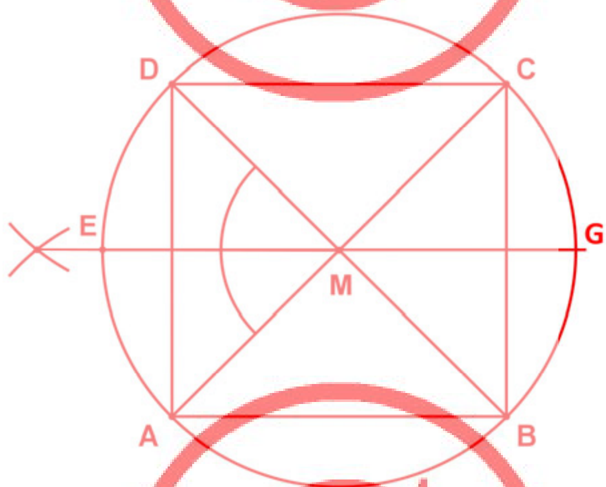


Achteck

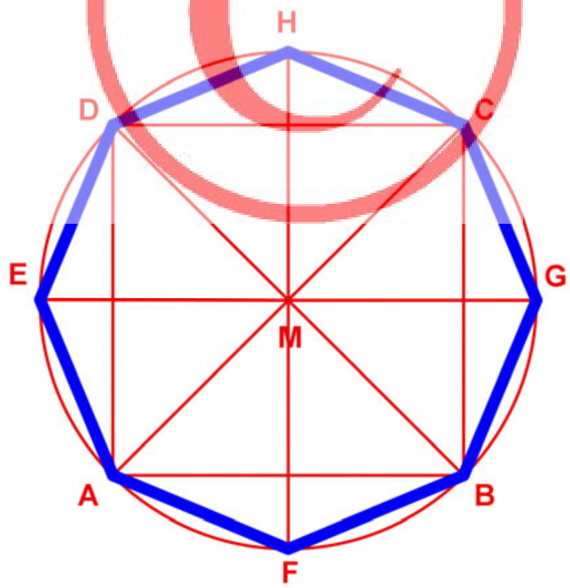
- Das Achteck konstruiert man aus einem Quadrat, indem man die Zentriwinkel halbiert (Winkelhalbierende).



- Zur Teilung des Zentriwinkels kann man die Punkte A und D verwenden. Ziehe um diese Punkte einen Kreis mit gleichem Radius. Verbinde den Schnittpunkt mit M und ziehe die Linie bis zur anderen Seite des Kreises. Die neuen Punkt auf der Umkreislinie sind E und G.



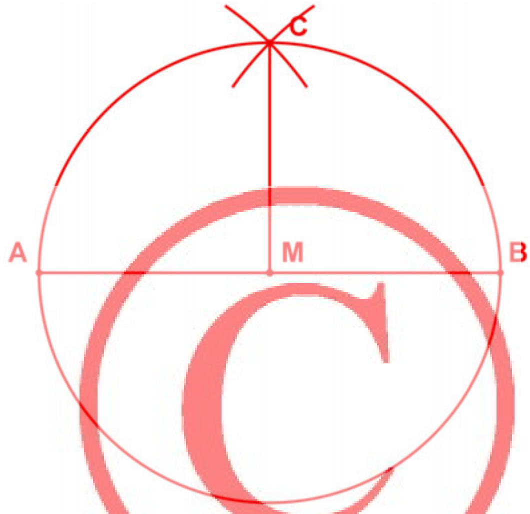
- Konstruiere auf dieselbe Weise die Punkte F und H und verbinde alle Punkte auf der Kreislinie zu einem Achteck.



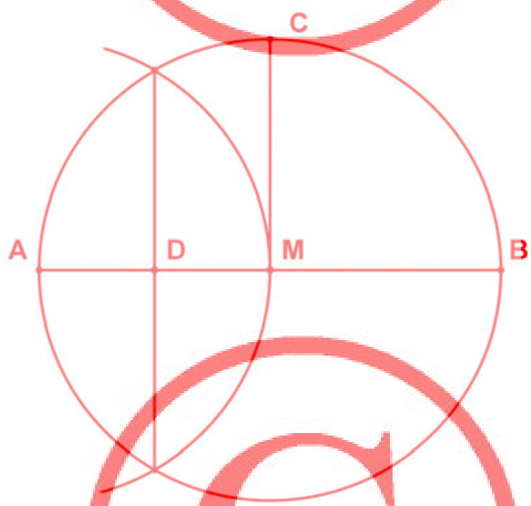
Fünfeck

Gegeben ist der Umkreis des Fünfecks – Möglichkeit 1

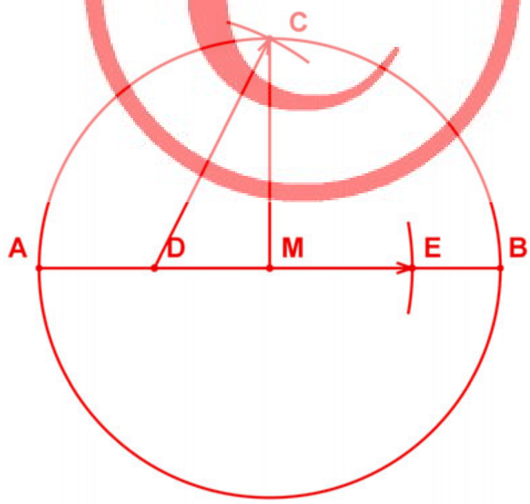
- Zeichne einen Kreis mit dem gewünschten Radius für den Umkreis des Fünfecks.
- Zeichne einen Durchmesser $\overline{AB}$ (waagrecht).
- Zeichne einen Radius $\overline{MC}$ senkrecht dazu.



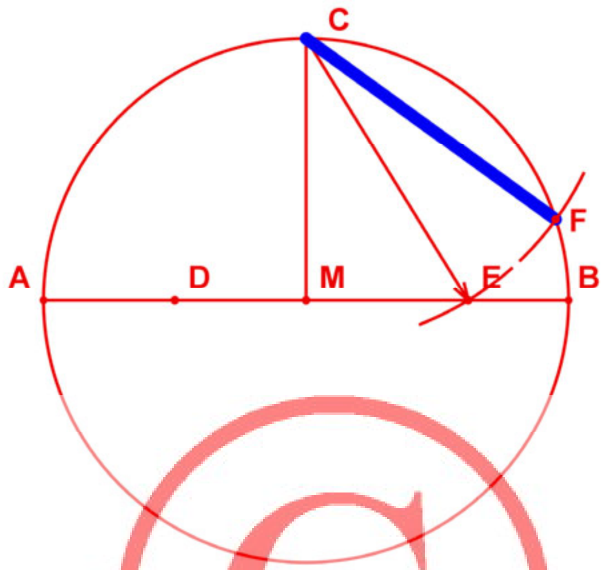
- Halbiere $\overline{AM}$, um den Punkt D zu erhalten. Ziehe dazu einen Kreis um A mit Radius $\overline{AM}$. Verbinde die Schnittpunkte auf der Umkreislinie.



- Setze den Zirkel in D ein. Stelle den Radius auf $\overline{DC}$ ein. Ziehe den Kreisbogen über die waagrechte Diagonale. Der Schnittpunkt ist E.

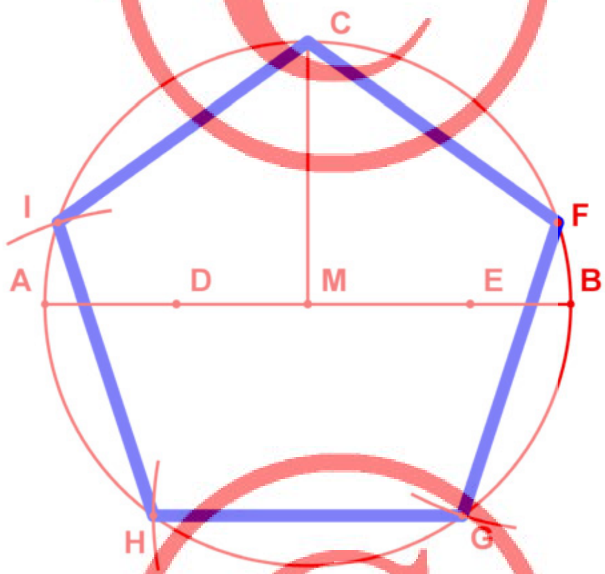


- Setze den Zirkel in C ein. Stelle den Radius auf $\overline{CE}$ ein. Ziehe den Kreisbogen über die Umkreislinie. Der Schnittpunkt ist F.



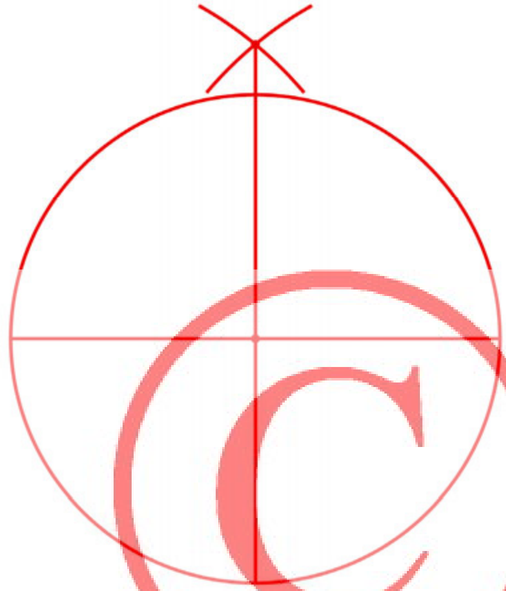
- $\overline{CE}$ bildet eine Seite des Fünfecks.

- Trage diese Länge $\overline{CE}$ noch drei Mal auf der Kreislinie ab und verbinde die Punkte F, G, H, I, C zu einem Fünfeck.



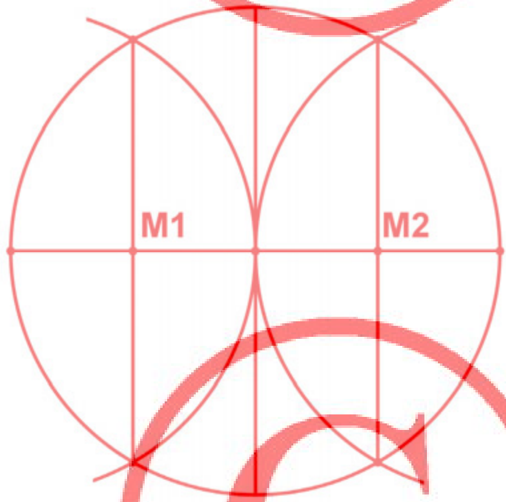
Gegeben ist der Umkreis des Fünfecks – Möglichkeit 2

- Zeichne einen Kreis mit dem gewünschten Radius für den Umkreis des Fünfecks.



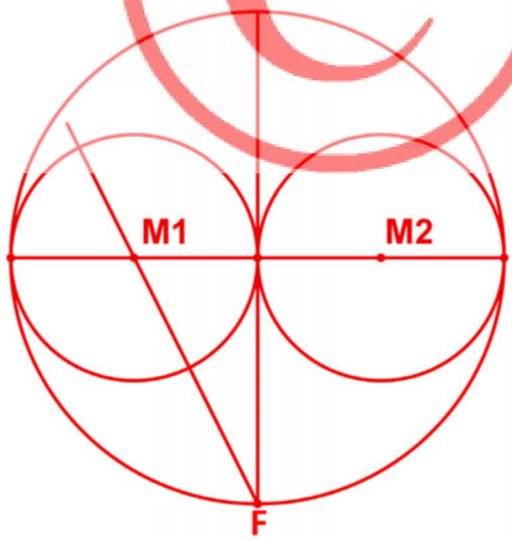
- Zeichne einen waagrechten Durchmesser und konstruiere dazu den senkrechten Durchmesser.

- Konstruiere die beiden Mittelpunkte der Radien.

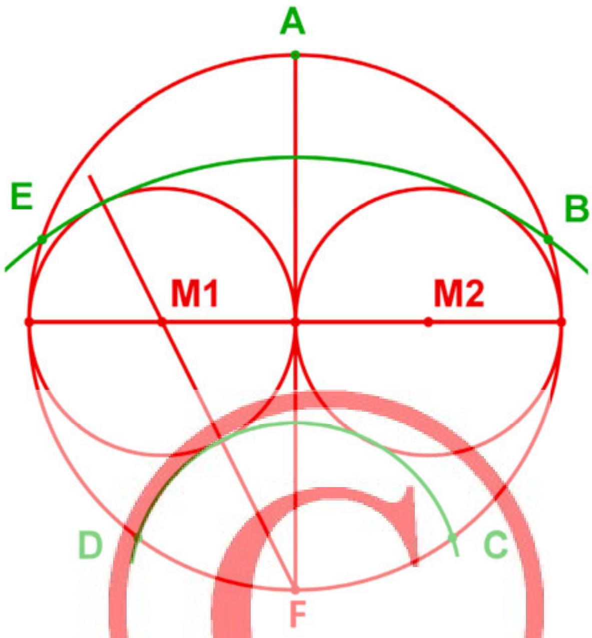


- Ziehe zwei Kreise um M1 und M2, die genau in den großen Außenkreis passen.

- Ziehe eine Sekante vom Fußpunkt F durch den Mittelpunkt M1.

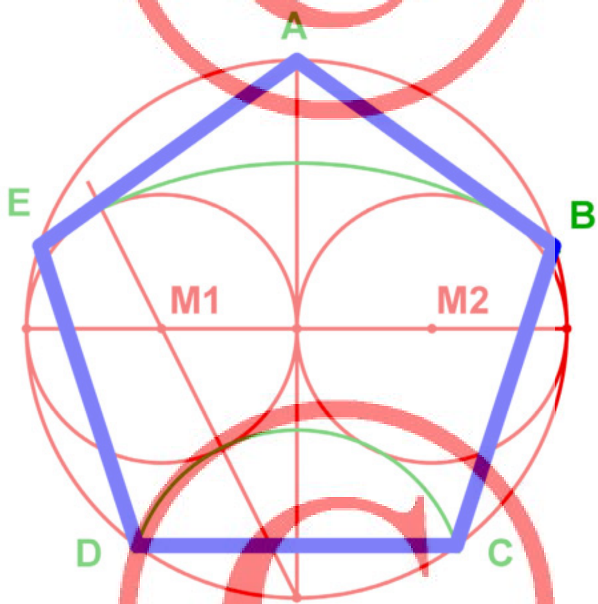


- Lege an die Schnittpunkte dieser Linie mit dem kleinen Kreis zwei Kreisbögen aus dem Zentrum F.



- Diese schneiden die Umkreislinie in den Punkten E, B, D und C.

- Verbinde alle 5 Punkte auf der Umkreislinie zu einem Fünfeck.

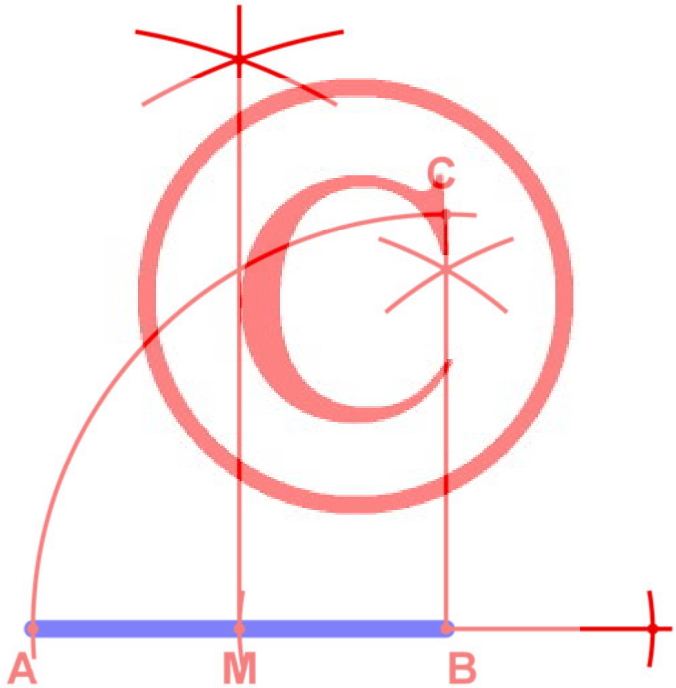


(Falls du dich fragst, warum man den zweiten kleinen Kreis um M2 brauchte: Man braucht ihn eigentlich gar nicht, aber man findet ihn in allen Konstruktionsanleitungen, weil die Symmetrie so reizvoll aussieht.)

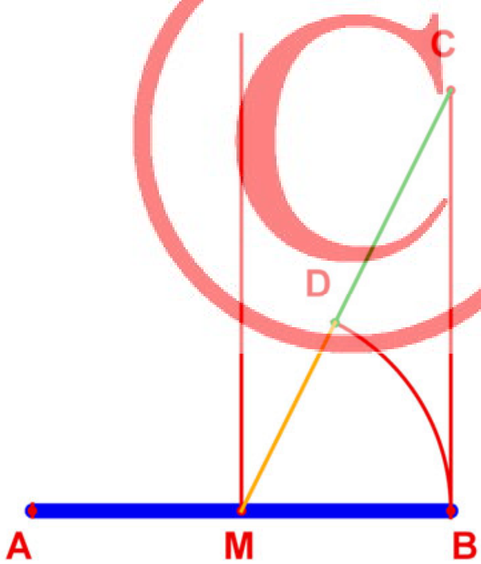
Gegeben ist eine Seite des Fünfecks

Diese Konstruktion ist schon ziemlich schwierig. Vielleicht kannst du sie trotzdem Schritt für Schritt nachzeichnen:

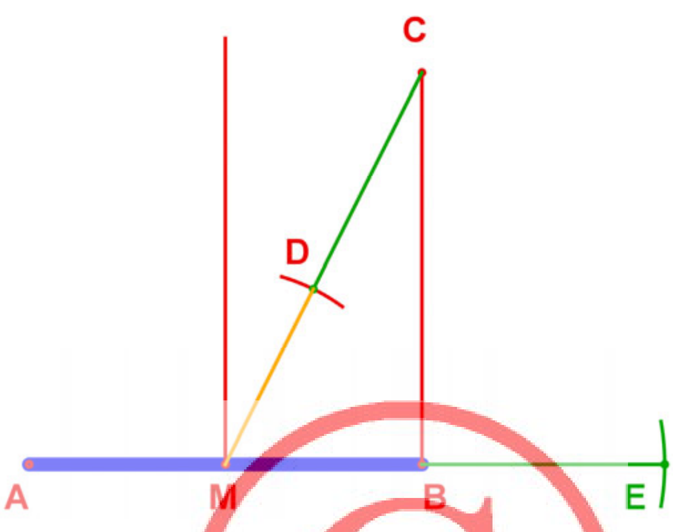
- Zeichne die gewünschte Strecke $\overline{AB}$ für das Fünfeck.
- Errichte über dieser Seite eine Mittelsenkrechte.
- Konstruiere die Senkrechte $\overline{BC}$ mit Länge $\overline{AB}$.



- Verbinde M und C.
- Diese Linie wird nun nach dem Goldenen Schnitt unterteilt:
  Ziehe einen Kreis um M mit Radius $\overline{MB}$.



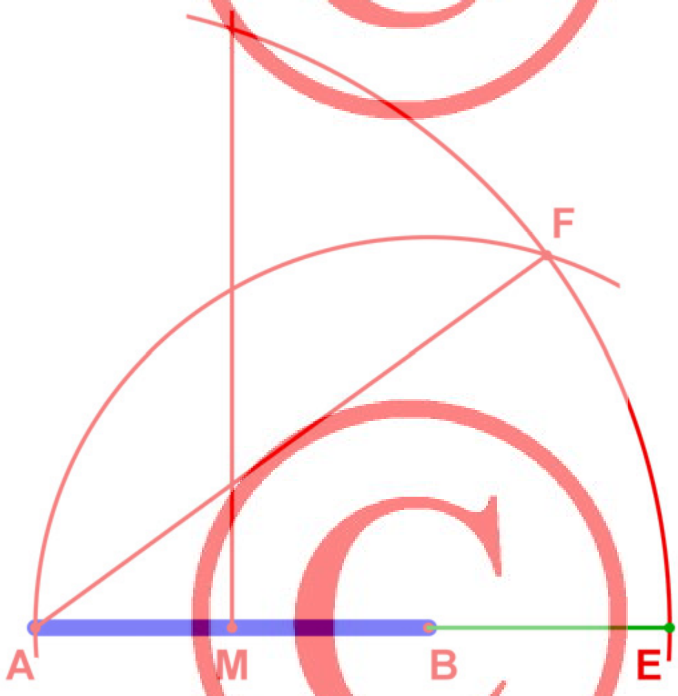
- Trage die Strecke $\overline{CD}$ mit dem Zirkel ab und setze diese Strecke an $\overline{AB}$ an. So entsteht Punkt E.



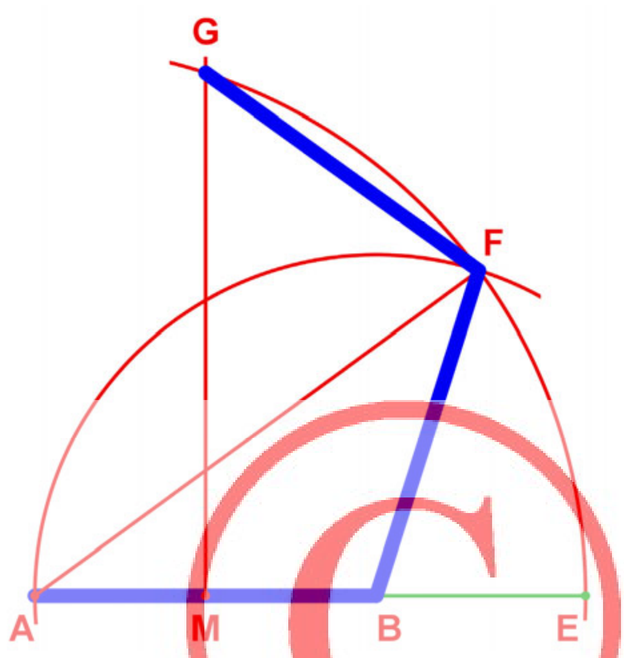
- Ziehe einen Bogen um A mit Radius $\overline{AE}$.

- Ziehe einen Bogen um B mit Radius $\overline{AB}$.

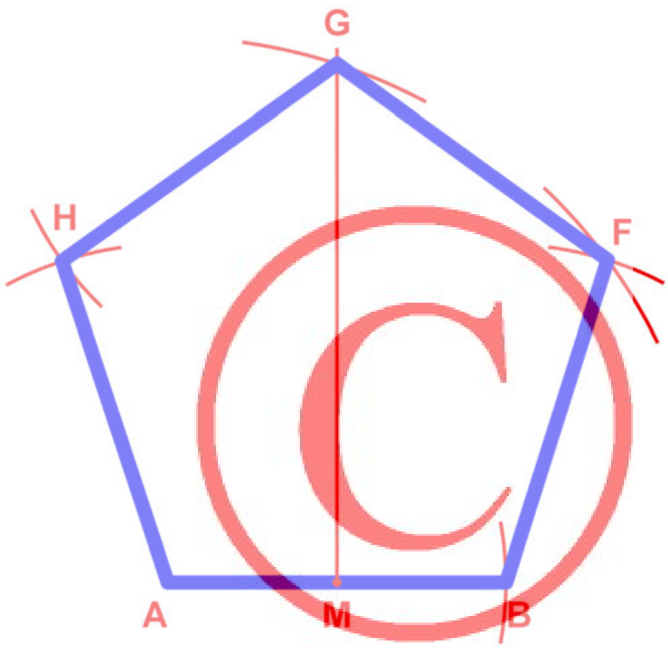
- Der Schnittpunkt der Bögen ist F.
  $\overline{AF}$ ist eine Diagonale des Fünfecks.



- $\overline{BF}$ bildet die zweite Seite des Fünfecks.
- Der Schnittpunkt des großen Bogens mit der Mittelsenkrechten über M bildet den Punkt G.
- $\overline{FG}$ ist die dritte Seite des Fünfecks.



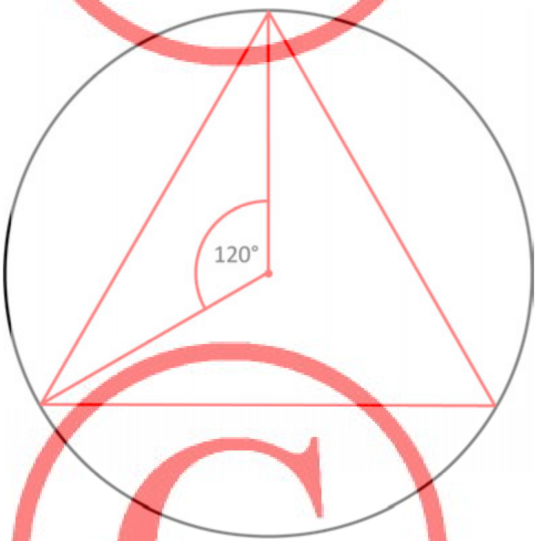
- Trage die Länge $\overline{AB}$ mit dem Zirkel ab und ziehe einen Bogen um A und um G.
- Der Schnittpunkt ist H. Nun hast du alle Punkte und Seiten des Fünfecks.

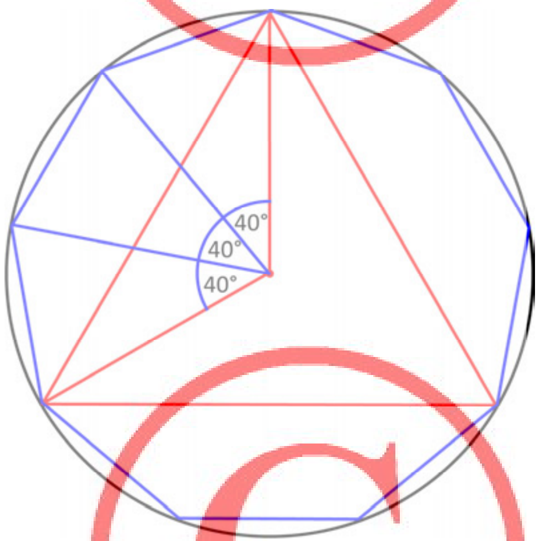


Näherungskonstruktionen

Das Dreieck, das Viereck, das Fünfeck, das Sechseck, das Achteck und das Zehneck konnten die antiken Mathematiker mit ihrer strengen Methode „Zirkel und Lineal“ exakt konstruieren.

Beim Siebeneck und beim Neuneck gelang es ihnen mit dieser Methode nicht. Das ist überraschend, denn man kann sich doch leicht vorstellen, wie man zum Beispiel ein Neuneck erhalten könnte: Ein Dreieck ist ganz einfach zu konstruieren. Teilte man nun den Winkel des Dreiecks in drei gleiche Teile, hätte man auch schon ein Neuneck.





Aber genau diese Dreiteilung des Winkels mit Zirkel und Lineal wurde zu einem unlösbaren Problem. Man kann einen Winkel halbieren, aber offenbar nicht dritteln.

Es wurden im Laufe der Zeit immer wieder neue Vorschläge gemacht, wie man ein Siebeneck und Neuneck in möglichst genauer Annäherung konstruieren kann, aber ganz exakt gelang es nie.

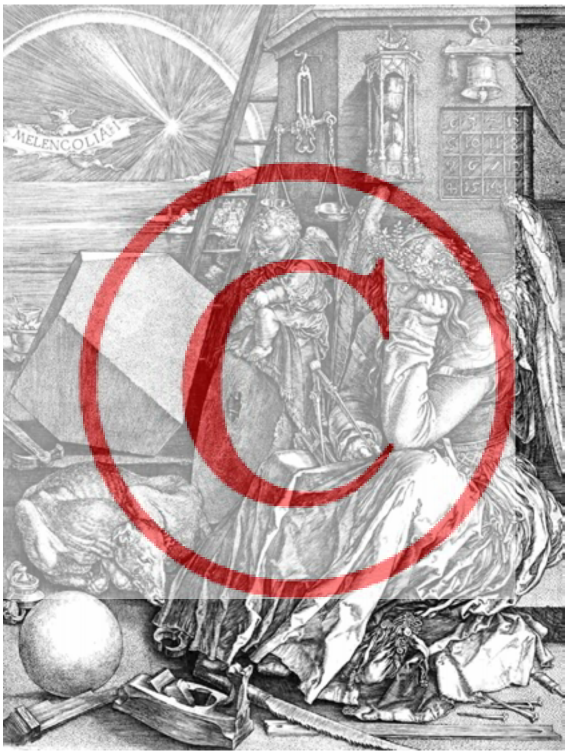
Erst 2000 Jahre später verstand Carl Friedrich Gauß (1777-1855), warum das so ist. Er konnte beweisen, dass es grundsätzlich unmöglich ist, diese Formen nur mit Zirkel und Lineal exakt zu konstruieren.

Gauß wurde durch dessen Abbildung auf dem früheren Zehnmarkschein geehrt.

Aber gerade deshalb war es für viele Mathematiker immer wieder eine besondere Herausforderung, eine möglichst genaue und raffinierte Methode für eine Näherungskonstruktion zu finden.

Besonders erfindungsreich war dabei der Künstler und Mathematiker Albrecht Dürer (1471-1528).

Selbstbildnis von Albrecht Dürer (1498)



Melencolia (1514) – Findest du den Zirkel und das Richtscheidt?

Viel Spaß beim Ausprobieren dieser faszinierenden Vorschläge!